Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Паламарчук Екатерина Сергеевна

Исследование линейных стохастических систем с переменными коэффициентами при неэргодических критериях оптимальности и аналитическое моделирование аномальных диффузий

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ

на соискание ученой степени доктора наук
по прикладной математике

Москва – 2024

Диссертационное исследование выполнено в Международной лаборатории стохастического анализа и его приложений Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

1 Введение

Актуальность и постановка проблемы. Линейные стохастические системы с переменными коэффициентами широко используются при моделировании процессов в различных областях приложений [1]–[21]. При этом соответствующие уравнения динамики содержат аддитивные шумовые воздействия в форме приращений винеровского процесса с зависящей от времени матрицей диффузии, что обуславливается целым рядом применяемых методов и подходов. Так, в биологических моделях такая специфика является следствием реализации метода приближения линейного шума, см., например, [2], [3]. В исследованиях по климатологии переменные коэффициенты возникают в результаты стохастического осреднения, см. [4]. Использование диффузионных аппроксимаций на основе выявления сходимостей к решениям линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) приводят к моделям линейных стохастических систем как инструменту анализа в области изучения ветвящихся процессов [5], теории массового обслуживания [6], трафика в транспортных сетях [7], биохимии [3], когнитивных науках [8], математической теории страхования [9]. При этом переменный характер коэффициентов соответствует зависимым от времени параметрам исходных процессов, таких как интенсивности входящих и исходящих потоков [6] (или импульсов [8]), темпы рождения/смертности/иммиграции [3], [5], скорость поступления страховых премий [9] и др. В физических и когнитивных исследованиях актуален учет изменяющегося во времени влияния внешней среды, что также приводит к неавтономным линейным уравнениям динамики, см. [10]–[12]. Предположение о наличии нестационарных колебаний вокруг меняющейся траектории дает мотивацию к использованию класса линейных средневозвратных процессов для моделирования экономических и финансовых переменных, см. [13].

В предположении о том, что в уравнение динамики также включены внешние управляющие воздействия, переходим к линейной стохастической системе управления [22], [23], [24, Глава IX, § 3]. Если целью управления является поддержание траектории развития системы вблизи заданного уровня, к примеру, нулевого, в течение планового периода, и любое отклонение порождает потери, при этом также рассматриваются затраты на управление, то целевой функционал естественно выбрать в интегральном квадратичном виде. Так как в данном случае речь идет об оценке потерь, относящихся к разным моментам времени, то важно отразить то, как агенты (субъекты управления) учитывают разновременные затраты. Из поведенческой экономики известно, см., например, [25], что в такой ситуации можно привлечь концепцию временных предпочтений, математически выражаемых при помощи дисконтирующей функции, зависящей от параметра времени. Тогда соответствующая функция будет входить в целевой функционал в качестве множителя для текущих потерь. Традиционно дисконтирующая функция имеет вид убывающей экспоненты, т.е. при постоянной ставке дисконтирования, [26, Section 6.1], [27, Section 2.7]. Вместе с тем, различные как теоретические, так и практические исследования показали, см. обзор [25], что в класс дисконтирующих могут быть включены функции с изменяющейся ставкой дисконтирования. При этом ставка дисконтирования выражается через логарифмическую производную дисконтирующей функции, взятую со знаком минус. «Нулевые» временные предпочтения означают отсутствие дисконтирования. Временные предпочтения с монотонно убывающей дисконтирующей функцией получили название «положительных». Допустима и обратная ситуация – возникновение «отрицательных» временных предпочтений и возрастающей дисконтирующей функции, см. [25] и подробный обзор в [28], что характерно для оценки потерь и рассмотрения больших горизонтов планирования, когда приоритет отдается будущему, [26, p. 97]. Стоит также отметить, что возрастающий множитель в целевом функционале может быть результатом конструирования системы управления при повышенных требованиях к стабилизации системы, см. [29], [30], как это было сделано в инженерных приложениях [31]. Очевидно также, что важную роль при этом играет увеличение интервала планирования. Здесь мы подходим к обсуждению основного вопроса – постановке задаче управления линейной стохастической системой на бесконечном интервале времени. Полезно подчеркнуть, что интегральный квадратичный целевой функционал также носит название функционала риска [32], т.е. возможность найти решение будет означать минимизацию долгосрочных рисков. Вначале обратимся к подходу, связанному с нахождением *оптимальных в среднем* управлений и основанному на сравнении математических ожиданий целевых функционалов. Здесь можно применить понятие *overtaking* оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени (т.е. «опережающей» оптимальности), см. [26, Section 1.5], означающей асимптотическую неположительность математического ожидания разности целевых функционалов, в случае, когда одно из рассматриваемых управлений – *overtaking* оптимально. Более распространен подход, при котором в качестве критерия оптимальности используется долговременное среднее, представляющее собой верхний предел от ожидаемых потерь на единицу времени, см. [22, с. 106], [26, Section 10.2], [27, Section 2.7], [33, Раздел 5.4]. Этот критерий можно назвать универсальным для процессов диффузионного типа, когда у коэффициентов системы управления нет явной зависимости от времени, см. [27, Section 3]. Применение долговременного среднего основано на идее о том, что на оптимальном управлении ожидаемое значение функционала растет пропорционально длине горизонта, см. [26, Section 10.1]. Очевидно, что в случае зависимости коэффициентов от времени такие выводы не имеют места, и оптимизация линейных стохастических систем управления с переменными коэффициентами на бесконечном интервале является актуальной проблемой. Выделим ряд важных факторов, влияющих на динамику линейной стохастической системы управления и оценку качества стратегий в долгосрочном периоде. К таким характеристикам относятся зависящие от времени коэффициенты уравнения состояния, например, неограниченные на бесконечности или сингулярные, а также наличие дисконтирования в целевом функционале. В частности, подобной спецификой может обладать переменная матрица диффузии, отражающая степень влияния шумовых воздействий, как в когнитивной модели [11] или физической модели движения частиц [14], [15]. Если обращаться к анализу детерминированной составляющей уравнения динамики, то примеры неограниченных матриц при состоянии можно обнаружить как в исследованиях по общей теории линейных систем [34], так и в конкретных моделях [10], [12], [16], [35]. Кроме того, специальный случай здесь представляет нелинейная взаимосвязь между внутренним временем системы и реальным (физическим) временем, что выражается в трансформации временной шкалы [17], [18] и, как следствие, домножении всех коэффициентов на монотонную функцию времени, так называемое «масштабирование», в качестве примеров без управления можно привести физическую модель в [16], когнитивную [12] и др. Если скорость изменения времени носит случайный характер, то получаем стохастическую временную шкалу, используемую, в частности, в физических [36] и финансовых приложениях [37]. При изучении задач управления на бесконечном интервале времени также стоит отметить возможность рассмотрения двустороннего целевого функционала, когда пределы интегрирования имеют противоположный знак, что актуально в теоретико-операторной перспективе [38] и моделях из ряда областей (передача информации – [39], инженерия – [40]). Таким образом, становится актуальным вопрос, касающийся постановки задач управления при возрастающем горизонте планирования, включая построение соответствующих критериев оптимальности на бесконечном интервале времени для учета указанных выше факторов.

Отметим, что для неавтономных систем применение линейных законов управления приводит к неэкспоненциальной асимптотической устойчивости матрицы в уравнении динамики и порождает целый класс линейных СДУ с переменными коэффициентами. Уравнения такого типа часто используются в различных приложениях при описании динамики состояния в качестве моделей реальных процессов, см. [1], [2], [10], [13], [15],

[16], [19], а также обзор в работах [41], [42]. Наряду со случаем аддитивных возмущений, т.е. процесса Орнштейна-Уленбека с переменными коэффициентами, возможно рассмотрение более общей ситуации линейных СДУ путем добавления мультипликативного шума, а также внешних наблюдаемых, но при этом случайных воздействий в динамику. В качестве примеров можно привести модели доходностей [43], аномальных диффузий [44], [45], концентраций химических веществ [46]. При анализе поведения решений уравнений, описывающих эволюцию состояний систем во времени, естественным образом встает вопрос об оценке колебаний их траекторий вблизи положений равновесия, что также позволяет выявить степень влияния шума в долгосрочном периоде.

Необходимо отметить, что еще одним из важных приложений линейных стохастических систем с переменными коэффициентами является аналитическое моделирование процессов, известных как аномальные диффузии. Если линейное СДУ задает динамику скорости, то интеграл от его решения определяет процесс перемещения. Тогда аномальная диффузия характеризуется нелинейным изменением во времени второго момента этого процесса, называемого среднеквадратичным перемещением. Линейный рост соответствует процессу скорости в виде гауссовского «белого шума», т.е. перемещению по типу броуновского движения, или же интегралу от стандартного процесса Орнштейна-Уленбека, так называемых «нормальных» диффузий. В случае нелинейной зависимости выделяются субдиффузия и супердиффузия. Важно подчеркнуть, что для процессов скорости, задаваемых при помощи линейных СДУ, основные характеристики могут быть выписаны в явном виде, что делает их доступным инструментом для аналитического моделирования. В данном случае появляется возможность провести достаточно полную классификацию по выделению типов диффузий, что также представляет собой актуальную проблему.

Степень разработанности проблемы. Обращаясь к проблематике оптимальности на бесконечном интервале времени, необходимо остановиться на подходе, связанном с понятием так называемой стохастической оптимальности в системах управления. Как известно, оптимальность для критериев, основанных на математических ожиданиях, говорит о качестве управления в среднем по множеству всех реализаций случайного процесса и не дает ответа на вопроса о том, что происходит, если задействовать вероятностные постановки, например, попытаться сравнить отдельные траектории. Так возникает понятие стохастической оптимальности или оптимальности с точки зрения вероятностных критериев, см. [47]–[49]. Здесь можно отдельно выделить так называемые «чувствительные» вероятностные критерии, когда, по аналогии с понятием *overtaking* оптимальности в среднем, рассматривается минимизация взвешенной разности целевых функционалов (почти наверное, по вероятности, по распределению) для разных классов нормирующих функций, асимптотически стремящихся к нулю, см. [47], [48], [50], [51]. С этой точки зрения линейно-квадратическая система управления исследуется с 80-х гг. 20 века благодаря развитию ряда вероятностно-статистических, в частности, мартингальных методов, см. обзоры в [49] и [51]. Наиболее сильный в вероятностном смысле тип оптимальности – оптимальность почти наверное или потраекторная оптимальность, когда минимизация критерия происходит с вероятностью 1, см. [27, Sections 2.7, 3], [47], [48]. Классическим примером вероятностного критерия для управляемых случайных процессов диффузионного типа является потраекторное эргодическое (потраекторное среднее), представляющее собой верхний предел отношения целевого функционала к длине горизонта планирования [27, Section 2.7], [38]. Ключевым предположением при использовании данного критерия оказывается эргодичность систем управления, вместе с рядом других условий, гарантирующих возможность определения инвариантной меры, см. [27, Section 3], [38]. Для получения результатов по «чувствительным» вероятностным критериям [47], [48] также требуется автономность уравнений, что делает методы неприменимыми к системам с переменными коэффициентами. Вместе с тем, как показано в [51], в линейно-квадратическом случае для системы с ограниченными коэффициентами можно получить явное представление для разности целевых функционалов и определить асимптотическую верхнюю границу (почти наверное) в виде логарифмической функции от длины планового интервала, а затем привлечь критерий потраекторного эргодического.

Также необходимо коснуться методологии анализа линейных систем управления на больших интервалах планирования. Важным свойством детерминированной системы, которое может гарантировать решение задачи оптимального управления, является стабилизируемость. Для случая ограниченных коэффициентов это означает достижение экспоненциальной устойчивости траекторий. Однако, как подчеркивалось в [52], для неограниченных или сингулярных матриц такая оценка может быть неинформативной и возможна более точная, неэкспоненциальная, характеристика убывания нормы соответствующей фундаментальной матрицы. Вопросы неэкспоненциальной стабилизируемости рассматривались в [53] без обращения к проблематике оптимального управления. Тогда при использовании стратегии в виде линейной обратной связи можно получить уравнение линейного СДУ. Как известно для случая ограниченных коэффициентов, такому уравнению удовлетворяет процесс на управлении, оптимальном по критерию долговременного среднего [22, Раздел 3.6]. При этом само управление носит название оптимального установившегося закона и его форма может быть получена путем предельного перехода в виде законов управления, оптимальных на конечных интервалах (при условии, что существует «установившееся» решение матричного дифференциального уравнения Риккати без граничного условия, см. [22, Раздел 3.4]). Исследование асимптотического поведения соответствующих оптимальных процессов может вестись по ряду направлений. Во-первых, вызывают интерес условия на коэффициенты, при которых имеет место сходимость траекторий к нулю, см. [54], [55, Section 4.2,Section 4.3], [56] для случая ограниченных коэффициентов. Во-вторых, ставится задача получения неслучайной верхней оценки, с вероятностью 1 мажорирующей траектории, т.е. нужно найти верхнюю функцию, для частных случаев см. [51], где была определена логарифмическая функция, которая заменяется на степенную при добавлении мультипликативных возмущений, см. [57]. В области приложения линейных СДУ к моделированию аномальных диффузий известны различные отдельные модели. Так, аналитическое моделирование аномальных диффузий может происходить посредством замены времени в процессе броуновского движения [15] или стандартном процессе Орнштейна-Уленбека (ОУ) [16], изменения отдельных коэффициентов уравнения ОУ на зависимые от времени [11], [12], [58], а также использование масштабирующих функций для упомянутых выше стандартных процессов [20], [59]. Очевидно, что процесс ОУ с переменными коэффициентами может выступать обобщением приведенных выше моделей и требуется определение типов аномальных диффузий, получаемых на его основе. Для линейных СДУ с мультипликативными возмущениями также проводятся исследования по определению аномальных диффузий на их основе. Используются процессы масштабированного геометрического броуновского движения [45] или модели со степенными коэффициентами при наличии сразу двух видов шумов [44]. Описанный выше класс линейных СДУ с переменными коэффициентами, содержащих разные виды шумов и внешние случайные воздействия, также может выступать как обобщение уже рассмотренных частных случаев. Стоит отметить, что обсуждаемая ранее тематика, связанная с исследованием асимптотического вероятностного поведения решений таких СДУ, имеет приложение к моделированию аномальных диффузий. Утверждения в виде усиленных законов больших чисел для интегрированных процессов (т.е. процессов перемещений) по типу результатов из [60, Раздел 5.5] с подходящими нормировками позволяют выделять различные типы диффузий. При этом достаточные условия для сходимости нормированных процессов выражаются через статистические характеристики процесса скорости, оцениваемые на основе анализа линейных СДУ.

Цель и задачи исследования. Целью работы является изучение задач оптимального управления на бесконечном интервале времени для линейных стохастических систем с переменными коэффициентами, включая анализ асимптотического поведения их траекторий, и последующего приложения к моделированию аномальных диффузий. В соответствии с поставленной целью исследования были выделены следующие задачи:

1. разработать методологию анализа линейных стохастических систем управления с переменными коэффициентами при стремлении горизонта планирования к бесконечности, основанную на нахождении так называемого оптимального установившегося закона управления, являющегося предельной формой для решений задач управления на конечных интервалах;

2. построить неэргодические критерии оптимальности для задач управления на бесконечном интервале времени, обобщающие известные критерии долговременных средних (долговременное среднее и потраекторное эргодическое) и учитывающие факторы, влияющие на поведение системы и оценку качества стратегий управления в долгосрочном периоде (переменная матрица диффузии, неограниченные матрицы в уравнении состояния, наличие дисконтирование в целевом функционале и нелинейной временной шкалы);

3. ввести в рассмотрение понятие эффективности критерия оптимальности и провести исследование эффективности долговременных средних на основе учета фактора переменной матрицы диффузии;

4. рассмотреть задачу управления на бесконечном интервале для стандартной системы с ограниченными коэффициентами при использовании обобщенных критериев долговременных средних;

5. найти вид оптимальной стратегии в задачах управления системами с дисконтированием;

6. найти вид оптимальной стратегии управления на бесконечном интервале при обобщении стандартной системы на случай неоднородных составляющих в уравнении динамики процесса и целевом функционале;

7. рассмотреть задачу оптимального управления системой с двусторонним квадратичным целевым функционалом с возможностью неограниченного возрастания матрицы диффузии;

8. провести анализ систем управления с неограниченными на бесконечности матрицами при состоянии в уравнении динамики, включая условия существования оптимальной установившейся стратегии;

9. применить разработанную методологию анализа при исследовании системы с разнонаправленным дисконтированием, т.е. при включении в целевой функционал дисконтирующих функций с противоположной динамикой для разных видов потерь;

10. рассмотреть системы управления в случае домножения всех коэффициентов на масштабирующую функция, что также соответствует включению в анализ нелинейной временной шкалы, которая также может носить и случайный характер;

11. провести анализ поведения решения линейных стохастических дифференциаль-

ных уравнений с аддитивными шумами и неэкспоненциально устойчивыми матрицами состояния в части построения неслучайных верхних оценок для их траекторий;

12. обобщить методологию анализа решений линейных СДУ на случай скалярного неоднородного уравнения, включающего коррелированные аддитивные и мультипликативные шумовые воздействия;

13. рассмотреть задачу аналитического моделирования аномальных диффузий при помощи линейных СДУ, описывающих процесс скорости.

Описание методологии исследования. Методология исследования включает методы системного анализа, методы стохастического анализа, методы теории оптимального управления, методы теории вероятностей.

Научная новизна. Проводится анализ линейных стохастических систем с переменными коэффициентами, допускающими со временем как неограниченный рост, так и сингулярность. Для систем управления также рассматривается интегральный квадратичный целевой функционал, который может включать дисконтирование при помощи монотонных убывающих или возрастающих функций, при возможности асимптотической неограниченности для ставки дисконтирования. Эти факторы оказывают ключевое влияние на поведение системы в долгосрочном периоде и оценку качества применяемых стратегий. В таких системах управления традиционный критерий долговременного среднего и его потраекторный аналог (потраекторное эргодическое) могут давать нулевое значение для целого множества управлений, никак не связанных со свойством оптимальности, или же быть равными бесконечности на всех допустимых управлениях, что приводит к новой проблематике, касающейся эффективности критериев оптимальности на бесконечном интервале времени. Применяется методология, связанная с нахождением так называемого оптимального установившегося закона управления, являющегося предельной формой (при стремлении горизонта планирования к бесконечности) решений задач на конечных интервалах, т.е. минимизации ожидаемых значений целевых функционалов. Предложено использование неэргодических критериев оптимальности, наиболее точно учитывающих поведение целевого функционала и его ожидаемого значения на определенном выше законе управления. В результате получены критерии оптимальности на бесконечном интервале времени, обобщающие долговременные средние. Обобщение связано с применяемыми нормировками для последовательного учета факторов, влияющих на поведение системы в долгосрочном периоде (переменная матрица диффузии, включение дисконтирования, неоднородные слагаемые в уравнении динамики, нелинейная временная шкала, неограниченные коэффициенты матрицы состояния). Таким образом введенный принцип построения критериев оптимальности позволяет рассматривать задачи управления на бесконечном интервале времени для целых классов линейных стохастических систем с переменными коэффициентами и проводить долгосрочную оценку рисков.

Проводится анализ поведения решений линейных стохастических дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при стремлении параметра времени к бесконечности. В частности, такие СДУ задают динамику состояний линейных стохастических систем при использовании линейных устойчивых законов управления, а также используются при описании процесса скорости для аномальных диффузий. Предложено рассматривать неэкспоненциальный тип устойчивости матриц в уравнении и характеризовать его через зависящий от времени темп изменения верхней границы для нормы соответствующей фундаментальной матрицы. Таким образом выделяются экспоненциальный, суперэкспоненциальный и субэкспоненциальный типы устойчивости. Для оценки колебаний траекторий вводится верхняя функция, зависящая от основных факторов, влияющих на развитие системы, и связанных с коэффициентами из уравнения динамики.

Проблематика аналитического моделирования аномальных диффузий рассматривается с точки зрения использования процесса Орнштейна-Уленбека с произвольными переменными коэффициентами при условии асимптотической устойчивости коэффициента при состоянии в уравнении динамики. В частности, допускается периодический характер этой функции, что требует описания верхних и нижних оценок для соответствующего среднеквадратичного перемещения, через которые дается точное определение нормальной и аномальной диффузии. Вместе с тем решается и обратная задача определения зависящих от времени темпа устойчивости и коэффициента диффузии для воспроизведения заданной функции среднеквадратичного перемещения, что также дает возможность анализировать различные семейства моделей. Также предлагается вероятностная постановка, при которой происходит сравнение процесса перемещения с верхней функцией, известной из закона повторного логарифма. Таким образом типы диффузий могут быть выявлены исходя из близости оценок, характеризующих колебания их траекторий, к показателям для нормальных диффузий. Для общего случая линейного СДУ с коррелированными мультипликативными и аддитивными шумами, а также случайными внешними воздействиями, используется подход по моделированию аномальных диффузий, в котором задействованы указанные ранее среднеквадратичные оценки поведения их траекторий. Точнее, используются постановки с утверждениями о подходящих нормировках для второго момента процесса перемещения. Таким образом выявляются аномальные диффузии в среднем квадратичном или же с вероятностной точки зрения при сравнении с верхней функцией из закона повторного логарифма.

Апробация работы. Основные положения исследования докладывались на Научном семинаре Департамента прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ (июнь 2023 г.), международной конференции «International Conference Computer Data Analysis & Modeling 2022» (Minsk, Belarus, September 6-10 2022), Семинаре «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании» ЦЭМИ РАН (2022, 2021, 2016, 2015, 2014 гг.), Российском экономическом конгрессе (г. Москва, 21-25 декабря 2020 г.; 19-23 декабря 2016 г.), Всероссийской конференции «Экономический рост, ресурсозависимость и социально-экономическое неравенство» (г. Санкт-Петербург, 25-27 октября 2018 г.; 7-9 ноября 2016 г.), международных конференциях «International conference LSA Summer meeting» (Moscow, June 4-5 2018), «Asymptotic Statistics of Stochastic Processes and Applications XI» (Saint Petersburg-Peterhof, July 17-21 2017), «International conference Statistics meets Stochastics 2» (Moscow, June 9-10 2017), «VIII Moscow International Conference on Operations Research ORM 2016» (Moscow, October 17-22 2016), «Workshop on Stochastics, Statistics and Financial Mathematics» (Saint Petersburg-Pushkin, September 3 2016), European Control Conference ECC 2016 (Aalborg, Denmark, June 29-July 1 2016), «2nd Russian-Indian Joint Conference in Statistics and Probability» (Saint Petersburg, May 30-June 3 2016), XVII Апрельской международной научной конференции по проблемам развития экономики и общества (г. Москва, 19-22 апреля 2016 г.), международной конференции «Workshop «Теория игр, дизайн экономических механизмов и рыночные равновесия» (г. Санкт-Петербург, 8 апреля 2016 г.), Санкт-Петербургском международном экономическом конгрессе СПЭК-2016 (г. Санкт-Петербург, 22 марта 2016 г.), международных конференциях «Bachelier Colloquium on Mathematical Finance and Stochastic Calculus» (Metabief, France, January 17-24 2016; January 11-18 2015), «Workshop «New Trends in Stochastic Analysis and New Trends in statistical analysis of time series» (Moscow Region, Snegiri, December 7-11 2015), на Восьмой международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем MLSD 2015'» (г. Москва, 29 сентября-1 октября 2015 г.), Школе по стохастике и финансовой математике-Информационные технологии и системы 2015' (г. Сочи, 7-11 сентября 2015 г.), Первой Российской Конференции «Социофизика и социоинженерия» (г. Москва, 8-11 июня 2015 г.), международных конференциях «Second Conference on Stochastics of Environmental and Financial Economics» (Oslo, Norway, April 20-24 2015), «Stochastic Calculus, Martingales and Financial Modeling» (Saint Petersburg, June 29-July 6 2014), на XII Всероссийском совещании по проблемам управления (г. Москва, 16-19 июня 2014).

Список публикаций. Результаты опубликованы в следующих статьях:

[1*] *Belkina T.A., Palamarchuk E.S.* On stochastic optimality for a linear controller with attenuating disturbances // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74. No. 4 P. 628–

641.
https://doi.org/10.1134/S0005117913040061

[2] *Palamarchuk E.S.* Asymptotic behavior of the solution to a linear stochastic differential equation and almost sure optimality for a controlled stochastic process // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54. No. 1. P. 83–96.
https://doi.org/10.1134/S0965542514010114

[3*] *Palamarchuk E.S.* Analysis of criteria for long-run average in the problem of stochastic linear regulator // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. No. 10. P. 1756–1767.
https://doi.org/10.1134/S0005117916100039

[4] *Palamarchuk E.S.* Stabilization of linear stochastic systems with a discount: modeling and estimation of the long-term effects from the application of optimal control strategies // Mathematical Models and Computer Simulations. 2015. Vol. 7. No. 4. P. 381–388.
https://doi.org/10.1134/S2070048215040080

[5] *Palamarchuk E.* On infinite time linear-quadratic Gaussian control of inhomogeneous systems // 2016 European Control Conference (ECC). IEEE, 2016. P. 2477–2482.
https://doi.org/10.1109/ECC.2016.7810662

[6*] *Palamarchuk E.S.* Optimal controller for a nonautonomous linear stochastic system with a two-sided cost functional // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81. No. 1. P. 53–63.
https://doi.org/10.1134/S0005117920010051

[7*] *Palamarchuk E.S.* Optimization of the superstable linear stochastic system applied to the model with extremely impatient agents // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 3. P. 439–450.
https://doi.org/10.1134/S0005117918030049

[8*] *Palamarchuk E.S.* On the optimal control problem for a linear stochastic system with an unstable state matrix unbounded at infinity // Automation and Remote Control. 2019. Vol. 80. No. 2. P. 250–261.
https://doi.org/10.1134/S0005117919020048

[9] *Palamarchuk E.S.* On optimal stochastic linear quadratic control with inversely proportional time-weighting in the cost // Theory of Probability & Its Applications. 2022. Vol. 67. No. 1. P. 28–43.
https://doi.org/10.1137/S0040585X97T990733

[10*] *Palamarchuk E.S.* Time invariance of optimal control in a stochastic linear controller design with dynamic scaling of coefficients // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2021. Vol. 60. No. 2. P. 202–212.
https://doi.org/10.1134/S1064230721020106

[11] *Palamarchuk E.S.* Optimal control for a linear quadratic problem with a stochastic time scale // Automation and remote control. 2021. Vol. 82. No. 5. P. 759–771.
https://doi.org/10.1134/S0005117921050027

[12*] *Palamarchuk E.S.* On the generalization of logarithmic upper function for solution of a linear stochastic differential equation with a nonexponentially stable matrix // Differential Equations. 2018. Vol. 54. No. 2. P. 193–200.
https://doi.org/10.1134/S0012266118020064

[13*] *Palamarchuk E.S.* On asymptotic behavior of solutions of linear inhomogeneous stochastic differential equations with correlated inputs // Differential Equations. 2022. Vol. 58. No. 10. P. 1291–1308.
https://doi.org/10.1134/S00122661220100019

[14*] *Palamarchuk E.S.* An analytic study of the Ornstein–Uhlenbeck process with time-varying coefficients in the modeling of anomalous diffusions // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 2. P. 289–299.
https://doi.org/10.1134/S000511791802008X

[15] *Palamarchuk E.S.* On upper functions for anomalous diffusions governed by time-varying Ornstein–Uhlenbeck process // Theory of Probability & Its Applications. 2019. Vol. 64. No. 2. P. 209–228.
https://doi.org/10.1137/S0040585X97T989453

* – публикации в изданиях уровня Q1/Q2 БД Web of Science/Scopus (9 статей)

Статьи в списке публикаций приведены в порядке, соответствующем последующему краткому изложению основных результатов диссертационного исследования, касающегося вопросов стохастического оптимального управления линейными системами [1] – [11], исследования динамики состояний [12] – [13], аналитического моделирования аномальных диффузий [13] – [15].

Личный вклад автора в разработку проблемы. Работы [2] – [15] написаны единолично, работа [1*] – в соавторстве с Т.А. Белкиной.

Благодарности. Публикации [3], [11], [14], [15] подготовлены в соответствии с планом научных исследований и при финансовой поддержке НИУ ВШЭ, [1], [6], [10] – ЦЭМИ РАН, [5], [7] – [9], [12], [13] – РНФ, [2], [4] – РФФИ. Автор выражает благодарность коллективу Международной лаборатории стохастического анализа и его приложений НИУ ВШЭ, коллективу Лаборатории Стохастической оптимизации и теории риска ЦЭМИ РАН, а также сотрудникам Департамента прикладной математики МИЭМ НИУ ВШЭ за обсуждение работы.

Достоверность результатов. Результаты являются строго доказанными математическими утверждениями.

Теоретическая и практическая значимость. Основные положения работы вносят вклад в методологию анализа линейных стохастических систем. Представлен инструментарий для оценки долгосрочных последствий применения выбранных стратегий и моделирования аномальных диффузий, который может быть использован в практических приложениях.

Основные результаты, выносимые на защиту.

- Предложена методология анализа линейных стохастических систем управления с интегральным квадратичным целевым функционалом и зависящими от времени коэффициентами при стремлении горизонта планирования к бесконечности. Подход основан на нахождении вида так называемого оптимального установившегося закона управления (ОУЗ) в виде линейной обратной связи по состоянию. Эта стратегия является предельной формой для решений задач минимизации ожидаемых значений целевых функционалов на конечных интервалах и включает в своей структуре решение матричного дифференциального уравнения Риккати.

- Проведено построение неэргодических критериев оптимальности, обобщающих критерии долговременных средних в задачах управления на бесконечном интервале времени. При этом под критериями долговременных средних понимается классическое долговременное среднее, служащее для выявления свойства оптимальности в среднем, и потраекторное среднее, называемое также потраекторным эргодическим, используемое при оптимизации с вероятностью 1 (почти наверное), т.е. характеризации потраекторной оптимальности. Построенные критерии содержат информацию о факторах, влияющих на поведение системы в долгосрочном периоде: переменной матрице диффузии, наличии дисконтирования в целевом функционале, нелинейной временной шкалы, а также неограниченных матриц при состоянии в уравнении динамики.

- Для системы с ограниченными коэффициентами при стандартных условиях экспоненциальной стабилизируемости и выявляемости пар матриц коэффициентов показано, что управление ОУЗ является решением задачи с критерием обобщенного долговременного среднего, когда нормировка функционала в виде длины горизонта планирования заменяется на интеграл от квадрата нормы матрицы диффузии.

- Введено понятие эффективности критерия оптимальности на бесконечном интервале времени, означающее положительность его значения на управлении ОУЗ, и неэффективности, когда это значение равно нулю на целом множестве управлений. Показано, что критерии долговременных средних являются неэффективными в случае более медленного, чем длина горизонта планирования, роста дисперсий интегральных шумовых воздействий. Приведенные выше критерии обобщенных долговременных средних являются эффективными относительно фактора переменной матрицы диффузии.

- Рассмотрены задачи управления для систем, включающих дисконтирование. Найден вид оптимальных стратегий управления на основе критериев, связанных с накопленным дисконтом.

- Для системы управления с ограниченными коэффициентами, а также неоднородными слагаемыми в уравнении динамики и целевом функционале (аффинные компоненты в уравнении динамики и линейные по состоянию слагаемые в функционале) построены критерии оптимальности на бесконечном интервале времени с нормировкой в виде меры интегрального отклонения коэффициентов в неоднородной части системы управления от стандартного детерминированного линейно-квадратического регулятора. Установлены условия оптимальности стратегии ОУЗ по этим критериям.

- Проведен анализ системы управления с двусторонним целевым функционалом, в котором пределы интегрирования имеют противоположный знак, в предположении об ограниченной или же монотонно возрастающей по времени норме матрицы диффузии. Установлены условия оптимальности стратегии ОУЗ при обобщении долговременных средних.

- Рассмотрены задачи управления на бесконечном интервале в случаях, когда матрица при состоянии в уравнении динамики со временем становится неограниченной. Проанализированы ситуации суперэкспонециально устойчивой и антиустойчивой матриц, сформулированы соответствующие понятия устойчивости/антиустойчивости и введена характеристика их темпа. Установлена оптимальность ОУЗ по критерию скорректированного обобщенного долговременного среднего, где корректирующая функция выражается через темпы устойчивости/антиустойчивости.

- Рассмотрена система управления с разнонаправленным дисконтированием и абсолютно интегрируемыми на бесконечности матрицами, относящимися к состоянию. Показано, что управление ОУЗ будет оптимально по критерию скорректированного обобщенного долговременного среднего и, при ряде условий на матрицу диффузии, также оптимальным и в потраекторном смысле.

- Рассмотрены случаи линейной стохастической системы управления при динамическом масштабировании, т.е. домножении всех ее матриц на функцию времени, что также интерпретируется как результат использования нелинейной временной шкалы, которая также может иметь и стохастическую природу. Установлена инвариантность стратегии ОУЗ, совпадающей с решением задачи управления для системы с постоянными коэффициентами. Также найдены условия, при которых стохастическую нормировку в критерии обобщенного долговременного среднего можно заменить на детерминированную без потери информации о качестве управления.

- Проведен асимптотический анализ поведения решений линейных СДУ с переменными коэффициентами при аддитивных возмущениях и неэкспоненциально устойчивых матрицах в уравнениях. Найден вид детерминированной верхней функции, с вероятностью 1 асимптотически мажорирующей траектории процесса.

- Для скалярного линейного СДУ с переменными коэффициентами, включающего коррелированные аддитивные и мультипликативные возмущения, а также внешние наблюдаемые воздействия в форме случайного процесса, проведен анализ поведения траекторий в смысле построения верхних оценок (в среднем квадратичном и почти наверное). Найден явный вид среднеквадратичной верхней оценки как функции от дисперсий процессов, соответствующих решениям уравнений только с одним видом внешних воздействий. Верхняя функция, как оценка колебания траекторий с вероятностью 1, определена с учетом корректирующего множителя, представляющего собой интеграл от квадрата коэффициента диффузии мультипликативных возмущений.

- Проведено изучение линейных СДУ с переменными коэффициентами в направлении аналитического моделирования аномальных диффузий. Сформулировано точное определение нормальной и аномальной диффузии через сравнение верхней и нижней оценок для среднеквадратичного перемещения с длиной горизонта наблюдения. Решена задача нахождения параметров уравнения для воспроизведения заданной функции среднеквадратичного перемещения. Показано, что при этом темп устойчивости и коэффициент диффузии должны быть связаны уравнением Риккати, известным из теории фильтрации.

- Предложена вероятностная постановка по выявлению типов диффузии при сравнении процесса перемещения с характеристиками для траекторий нормальных диффузий, известных из закона повторного логарифма (т.е. верхних функций). Найдены явные выражения для верхних функций процессов перемещений при различных предположениях на параметры. Проведено сравнение результатов по выявлению типов диффузий на основе классификации среднеквадратичных перемещений и по верхним функциям.

- Для линейного СДУ с коррелированными аддитивными и мультипликативными возмущениями, а также нешумовыми внешними воздействиями выявлены условия на его коэффициенты, при которых соответствующий процесс задает субдиффузию в среднем квадратичном и по верхним функциям.

2 Краткое описание основных результатов

2.1 Методология анализа линейных стохастических систем управления в долгосрочном периоде

Рассматриваются модели линейных управляемых случайных процессов с переменными коэффициентами, характеризующие состояния систем. Все вводимые далее случайные процессы заданы на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$. Предполагается, что n-мерный случайный процесс X_t, $t \geq 0$, описывается уравнением

$$dX_t = A_t X_t dt + B_t U_t dt + G_t dW_t\,, \qquad X_0 = x, \tag{2.1.1}$$

где начальное состояние x неслучайно; W_t, $t \geq 0$, – d-мерный стандартный винеровский процесс; U_t, $t \geq 0$, – допустимое управление, или k-мерный случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s,\, s \leq t\}$, такой что уравнение (2.1.1) имеет решение ($\sigma(\cdot)$ – знак σ–алгебры); A_t, B_t, G_t – детерминированные матрицы соответствующих размерностей, элементы которых зависят от времени. Множество допустимых управлений обозначим через $\mathcal{U}$. Будем предполагать, что система не является детерминированной на всем бесконечном интервале времени, точнее, что $\int\limits_0^\infty \|G_t\|^2\, dt > 0$ ($\|\cdot\|$ – евклидова норма).

Для каждого $T > 0$ в качестве целевого функционала определим случайную величину (с.в.)

$$J_T(U) = \int_0^T (X_t' Q_t X_t + U_t' R_t U_t)\, dt, \tag{2.1.2}$$

где $U \in \mathcal{U}$ – допустимое управление на интервале $[0, T]$; $Q_t \geq 0$, $R_t > 0$, $t \geq 0$, – симметричные матрицы, неотрицательно определенная и положительно определенная соответственно. Запись $A > B$ ($A \geq B$) для матриц A и B означает, что $A - B$ – положительно (неотрицательно) определена, $'$ – знак транспонирования.

В традиционном понимании управление U^{*T} называется оптимальным на интервале $[0, T]$ (далее называем его оптимальным в среднем), если

$$EJ_T(U^{*T}) = \inf_{U\in\mathcal{U}} EJ_T(U). \tag{2.1.3}$$

Для модели (2.1.1)–(2.1.2) вид решения задачи (2.1.3) хорошо известен (см., например, [22, Теорема 3.9, с. 302]). Оптимальное управление имеет вид $U_t^{*T} = -R_t^{-1} B_t' \Pi_t^T X_t^{*T}$, где симметричная матрица $\Pi_t^T \geq 0$ является решением уравнения Риккати

$$\dot{\Pi}_t + \Pi_t A_t + A_t' \Pi_t - \Pi_t B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t + Q_t = 0 \tag{2.1.4}$$

с граничным условием $\Pi_T^T = 0$; X_t^{*T}, $0 \leq t \leq T$, – процесс, определяемый по (2.1.1) при $U_t = U_t^{*T}$. В (2.1.4) точка обозначает производную по времени, а использование индексов ^{T} означает, что решения находятся из задач при конечном T. Предположим, что существует $\lim\limits_{T\to\infty} \Pi_t^T = \Pi_t$. Тогда в результате предельного перехода в виде оптимальной стратегии U_t^{*T} при $T \to \infty$ получаем так называемый *оптимальный установившийся закон управления*

$$U_t^* = -R_t^{-1} B_t' \Pi_t X_t^* \,, \tag{2.1.5}$$

где $\Pi_t \geq 0,\ t \geq 0,$ также удовлетворяет уравнению (2.1.4), процесс $X_t^*,\ t \geq 0$ задается при помощи уравнения

$$dX_t^* = (A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t) X_t^* dt + G_t dW_t \,, \quad X_0^* = x \,. \tag{2.1.6}$$

Управление U^* не зависит от T как от параметра и естественным образом может обладать свойствами оптимальности на бесконечном интервале времени по соответствующим критериям. Традиционно, см., например, [26, Section 10.2], в качестве критерия оптимальности при $T \to \infty$ используется долговременное среднее и решается задача

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} . \tag{2.1.7}$$

При оптимизации, направленной на выявление свойства стохастической оптимальности (почти наверное, п.н.), используется потраекторный аналог критерия долговременного среднего – потраекторное эргодическое (потраекторное долговременное среднее), см. [27], в задаче

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \text{ с вероятностью 1.} \tag{2.1.8}$$

Как будет показано далее, в ситуации переменных коэффициентов системы (2.1.1)–(2.1.2) приведенные выше критерии оказываются неэффективными. В результате анализа будут предложены их различные обобщения на случай переменной матрицы диффузии, наличия дисконтирования в целевом функционале, неограниченных матриц в уравнении процесса и т.д. Предлагаемый ниже подход по построению критериев оптимальности для $T \to \infty$ направлен на наиболее точный учет порядка изменения $EJ_T(U)$ и $J_T(U)$ при применении установившейся стратегии управления U^*. Нетрудно заметить, см. [61], [62], [63], что для функционалов $EJ_T(U^*)$ и $J_T(U^*)$ справедливы следующие представления:

$$EJ_T(U^*) = x'\Pi_0 x - E[(X_T^*)'\Pi_T X_T^*] + \int\limits_0^T tr(G_t'\Pi_t G_t)\, dt, \tag{2.1.9}$$

$$J_T(U^*) = EJ_T(U^*) + E[(X_T^*)'\Pi_T X_T^*] - [(X_T^*)'\Pi_T X_T^*] + 2\int\limits_0^T (X_t^*)'\Pi_t G_t dW_t \,, \tag{2.1.10}$$

где $tr(\cdot)$ – обозначение для следа матрицы. Тогда, обращаясь к (2.1.9)–(2.1.10), можно выделить последовательность шагов, необходимых для постановки и решения задач управления системой (2.1.1)–(2.1.2) при $T \to \infty$.

Алгоритм анализа линейных стохастических систем управления при $T \to \infty$

1. доказать существование матрицы $\Pi_t \geq 0$, являющейся решением уравнения Риккати (2.1.4), и определить функцию $p_t > 0$, $t \geq 0$, при которой $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\|\Pi_t\|/p_t\} < \infty$

2. ввести нормирующую функцию Γ_T, $T > 0$, вида

$$\Gamma_T = \int\limits_0^T p_t \|G_t\|^2 \, dt \tag{2.1.11}$$

3. сформулировать задачу управления

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\Gamma_T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \tag{2.1.12}$$

4. доказать оптимальность U^* в задаче (2.1.12), т.е. выявить свойство оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени

5. сформулировать задачу управления

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{\Gamma_T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью } 1 \tag{2.1.13}$$

6. доказать оптимальность U^* в задаче (2.1.13), т.е. выявить свойство потраекторной оптимальности на бесконечном интервале времени.

Очевидно, что реализация п. 4 и 6 предполагает нахождение ограничений на матрицу диффузии G_t, а п. 1 – установление требований к коэффициентам детерминированной системы управления, т.е. матрицам A_t, B_t, Q_t и R_t. Критерии в задачах (2.1.12), (2.1.13) далее будем называть критериями *скорректированных обобщенных долговременных средних*. Здесь под обобщением понимается изменение стандартных долговременных средних (2.1.7)–(2.1.8) при учете фактора переменной матрицы диффузии, см. [61], [64], [65], а корректировка в виде домножения на функцию p_t осуществляется с целью отразить влияние переменных коэффициентов A_t, B_t, Q_t и R_t, как было сделано в [62], [63], [66], [67]. В системах с дисконтированием (т.е. когда матрицы Q_t и R_t одинаково зависят от дисконтирующей функции времени как от множителя) при интерпретации критериев используется отдельная терминология, связанная с понятием «накопленного дисконта», см. [28], [62], [68], [69], [70].

Стоит подчеркнуть, что установление свойства оптимальности при $T \to \infty$ в результате решения задач (2.1.7)–(2.1.8), (2.1.12), (2.1.13), связано с использованием критериев, содержащих целевые функционалы или их ожидаемые значения с различными нормировками. Наряду с этим также существует подход, базирующийся на привлечении понятия так называемой *overtaking* оптимальности (т.е. «опережающей» оптимальности). Изначально понятие *overtaking* оптимальности возникло при анализе ряда детерминированных моделей математической экономики, см. [26, Section 1.4], и затем было адаптировано в [70] для управляемых диффузионных процессов. «Опережающая» *overtaking* оптимальность в среднем выявляется в результате непосредственного сравнения ожидаемых значений целевых функционалов на разных допустимых управлениях при $T \to \infty$.

Определение 2.1.1 ([64]) *Управление $U^* \in \mathcal{U}$ будем называть overtaking оптимальным в среднем, если для любого числа $\epsilon > 0$ существует $T_0 > 0$, такое что при произвольном допустимом управлении $U \in \mathcal{U}$ выполнено неравенство*

$$EJ_T(U^*) < EJ_T(U) + \epsilon \quad \textit{для любого } T > T_0. \tag{2.1.14}$$

Заметим, что из *overtaking* оптимальности в среднем управления будет следовать и его оптимальность в смысле (2.1.7) и (2.1.12).

2.2 Стандартный линейно-квадратический регулятор с ограниченными коэффициентами

Предположение 2.2.1 *Матрицы A_t, B_t, Q_t, R_t – ограничены, $R_t \geq \rho I$, $\rho > 0$ – некоторая константа, $t \geq 0$. Пара матриц (A_t, B_t) – (экспоненциально) стабилизируема, пара матриц (A_t, C_t) – (экспоненциально) выявляема при некоторой матрице C_t, для которой $C_t C_t' = Q_t$.*

Определение 2.2.1 ([71]) *Пара ограниченных матриц (A_t, B_t) называется (экспоненциально) стабилизируемой, если существует такая ограниченная матрица K_t с кусочно-непрерывными элементами, что матрица $A_t + B_t K_t$ является экспоненциально устойчивой. Пара ограниченных матриц (A_t, C_t) – (экспоненциально) выявляема, если (A_t', C_t') – (экспоненциально) стабилизируема.*

Определение 2.2.2 ([22]) *Матрица $\mathcal{A}_t$ называется экспоненциально устойчивой, если соответствующая ей фундаментальная матрица $\Phi(t,s)$ при некоторых константах $\kappa, \kappa_0 > 0$ допускает экспоненциальную оценку вида $\|\Phi(t,s)\| \leq \kappa_0 e^{-\kappa(t-s)}$, $s \leq t$.*

Напомним, что фундаментальная матрица $\Phi(t,s)$ для матрицы $\mathcal{A}_t$, $t \geq 0$, определяется как решение задачи

$$\frac{\partial \Phi(t,s)}{\partial t} = \mathcal{A}_t \Phi(t,s), \qquad \frac{\partial \Phi(t,s)}{\partial s} = -\Phi(t,s)\mathcal{A}_s, \quad \Phi(t,t) = \Phi(s,s) = I, \tag{2.2.1}$$

где I – единичная матрица. Как обсуждалось в [69] и [71, Theorem 2.2], при условии выполнения предположения 2.2.1 существует $\lim\limits_{T\to\infty}\Pi_t^T=\Pi_t$, где ограниченная матрица $\Pi_t\geq 0$ удовлетворяет (2.1.4) и при этом матрица $\mathcal{A}_t=A_t-B_tR_t^{-1}B_t'\Pi_t^T$ является экспоненциально устойчивой. Таким образом существует *оптимальный установившийся* закон управления вида (2.1.5)–(2.1.6). Кроме того, см. [69], свойства матриц из предположения 2.2.1 дают возможность выписать оценку для траекторий детерминированного линейного регулятора с нулевым начальным состоянием, используемую при сравнении функционалов $J_T(U^*)$ и $J_T(U)$, $T>0$. Точнее, существует константа $c_0>0$, такая что для любой пары $(x_t,u_t)_{t\leq T}$, удовлетворяющей уравнению

$$dx_t=A_tx_tdt+B_tu_tdt\,,\quad x_0=0\,, \tag{2.2.2}$$

справедливо неравенство

$$\|x_T\|^2+\int\limits_0^T\|x_t\|^2\,dt\leq c_0\int\limits_0^T(x_t'Q_tx_t+u_t'R_tu_t)dt. \tag{2.2.3}$$

Требование (2.2.3) было введено в работе [51] и также входило в набор достаточных условий существования оптимальных управлений при $T\to\infty$ в [28], [64], [65], [68]. Далее при изложении соответствующих результатов [64], [65], [68] будет привлекаться предположение 2.2.1 как наиболее компактное и связанное с классическими свойствами линейных систем управления.

Пусть выполнено предположение 2.2.1 и матрица диффузии G_t – ограничена, $t\geq 0$. Для учета фактора воздействия шума на систему при оценке управляющих воздействий в [64] были введены критерии обобщенных долговременных средних в задачах (2.1.12) (2.1.13) при нормировке $\Gamma_T=\int\limits_0^T\|G_t\|^2\,dt$.

В [64], [65] представлены результаты о решении задач (2.1.12) и (2.1.13), а также об условиях, когда найденный закон управления U^* обладает свойством *overtaking* оптимальности в среднем.

Теорема 2.2.1 ([64][1)],[65][2)]) *Пусть выполнено предположение* 2.2.1 *и матрица диффузии G_t – ограничена, $t\geq 0$. Тогда закон управления U^*, задаваемый в* (2.1.5)–(2.1.6), *является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T\|G_t\|^2\,dt}\to\inf_{U\in\mathcal{U}}\,, \tag{2.2.4}$$

[1)] См. Theorem 1 в *Belkina T.A., Palamarchuk E.S.* On stochastic optimality for a linear controller with attenuating disturbances // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74. No. 4 P. 628–641.

[2)] См. Theorem 2 в *Palamarchuk E.S.* Asymptotic behavior of the solution to a linear stochastic differential equation and almost sure optimality for a controlled stochastic process // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54. No. 1. P. 83–96.

т.е. оптимальным на бесконечном интервале времени по критерию обобщенного долговременного среднего. Если выполнено хотя бы одно из двух условий $\int\limits_0^\infty \|G_t\|^2\,dt < \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \|G_t\| = 0$, *то управление* U^* *также является и overtaking оптимальным в среднем. Кроме того, если* $\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt \to \infty,\ T \to \infty,$ *то* U^* *оптимально и в потраекторном смысле, т.е. является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}, \qquad \text{с вероятностью 1.}$$

При этом для $\Gamma_T = \int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt$ и $\limsup\limits_{T\to\infty} \Gamma_T = \infty$ имеет место следующее соотношение:

$\limsup\limits_{T\to\infty}\{EJ_T(U^*)/\Gamma_T\} = = \limsup\limits_{T\to\infty}\{J_T(U^*)/\Gamma_T\} = \limsup\limits_{T\to\infty}\{\int\limits_0^T tr(G_t'\Pi_t G_t)\,dt)/\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt\} < \infty,$ п.н., см. [65]. Таким образом, значение потраекторного критерия с вероятностью 1 также является конечным числом.

2.3 Анализ критериев долговременных средних

В разделе 2.1 отмечалось, что традиционные критерии долговременных средних в задачах (2.1.7) и (2.1.8) не учитывают многих факторов, влияющих на динамику системы управления в долгосрочном периоде. Также может сложиться ситуация, когда результаты применения не только оптимального установившегося закона управления U^*, но и целого множества управлений, никак не связанных со свойством оптимальности при конечном T, будут не отличимы по этим критериям. В таких случаях разумно говорить о неэффективности используемых критериев. Введем следующее определение.

Определение 2.3.1 ([61]) *Пусть* U^* *– установившийся закон управления, оптимальный в среднем на бесконечном интервале времени по критерию* $\mathcal{K}$ *в системе* (2.1.1)–(2.1.2). *Тогда назовем критерий* $\mathcal{K}$

а) *эффективным, если* $0 < \limsup\limits_{T\to\infty} E\mathcal{K}_T(U^*) < \infty$ *при* $\limsup\limits_{T\to\infty} EJ_T(U^*) > 0$;

б) *неэффективным, если существует множество* $\mathcal{U}^\mathcal{E} \subseteq \mathcal{U}$, *такое что* $\limsup\limits_{T\to\infty} E\mathcal{K}_T(U^*) = \limsup\limits_{T\to\infty} E\mathcal{K}_T(U^{(\epsilon)}) = 0$ *при любом* $U^{(\epsilon)} \in \mathcal{U}^\mathcal{E}$.

Эффективность потракторных критериев определяется аналогично, с заменой в п.а) и п.б) математических ожиданий на значения самих функционалов. Представляет интерес ситуация, когда нормировка $\Gamma_T = \int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt$ критериев раздела 2.2 растет медленнее интервала планирования T, например в модели процесса, характеризующего алгоритм глобальной оптимизации [21], или для модели аномальной диффузии в виде броуновского движения с заменой времени [14].

Предположение 2.3.1

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int\limits_0^T \|G_t\|^2 dt}{T} = 0\,. \tag{2.3.1}$$

Построим множество $\mathcal{U}^{\mathcal{E}}$ из определения 2.3.1. Пусть выполнено предположение 2.2.1, а $\kappa_0, \kappa > 0$ – константы в экспоненциальной оценке из определения 2.2.2. Из ограниченности функции B_t следует, что существует константа $\bar{b} > 0$, такая что $\|B_t\| \le \bar{b},\ t \ge 0$. Определим множество чисел $\mathcal{E}$ следующим образом:

$$\mathcal{E} = \{\epsilon > 0\ :\ \kappa - \epsilon\kappa_0\bar{b} > 0\}\,.$$

Для $\epsilon \in \mathcal{E}$ рассмотрим управление

$$U_t^{(\epsilon)} = (-R_t^{-1}B_t'\Pi_t + \epsilon I)X_t^{(\epsilon)}\,,$$

где процесс $X_t^{(\epsilon)}$, $t \ge 0$, удовлетворяет уравнению

$$dX_t^{(\epsilon)} = (A_t - B_tR_t^{-1}B_t'\Pi_t + \epsilon B_t)X_t^{(\epsilon)}dt + G_tdW_t\,,\ X_0^{(\epsilon)} = x\,, \tag{2.3.2}$$

и зададим множество управлений $\mathcal{U}^{\mathcal{E}} = \{U^{(\epsilon)}, \epsilon \in \mathcal{E}\}$. Отметим, что U^* соответствует случаю $\epsilon = 0$ и, следовательно, $U^* \in \mathcal{U}^{\mathcal{E}}$.

Теорема 2.3.1 ([61][3]) *Пусть выполнено предположение* 2.2.1*. Тогда для любого* $U^{(\epsilon)} \in \mathcal{U}^{\mathcal{E}}$ *существуют* $\bar{c}_\epsilon, c_\epsilon > 0$*, такие что*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U^{(\epsilon)})}{\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt} < \bar{c}_\epsilon, \quad \limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U^{(\epsilon)})}{\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt} < c_\epsilon,\ \text{п.н.}\,,$$

где $\bar{c}_\epsilon$ *– константа,* c_ϵ *– с.в. Также* $\bar{c}_\epsilon = c_\epsilon$*, п.н., если* $\int\limits_0^T \|G_t\|^2\,dt \to \infty,\ T \to \infty$*. Если при этом справедливо предположение* 2.3.1*, то*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U^\epsilon)}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{J_T(U^\epsilon)}{T} = 0\,,\ \text{п.н.}$$

Также, учитывая представления (2.1.9) и (2.1.10), очевидно, что эффективность критериев обобщенного долговременного среднего не зависит от специфики параметров шумовых воздействий. Здесь ключевым фактором становится поведение матрицы Π_t, которая определяется на основе параметров детерминированной системы управления. Если $\|\Pi_t\| \to 0$, $t \to \infty$, то критерии обобщенных долговременных неэффективны, см. [61].

[3] См. Theorem 1, Theorem 2 в *Palamarchuk E.S.* Analysis of criteria for long-run average in the problem of stochastic linear regulator // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. No. 10. P. 1756–1767.

2.4 Система управления с неоднородными слагаемыми

В данном разделе представляются результаты работы [69] о дальнейшем обобщении критериев долговременных средних. Помимо фактора возмущений учитываются и другие типы воздействий на систему управления в долгосрочном периоде – неоднородная по времени составляющая в уравнении динамики процесса, а также линейные по состоянию и управлению слагаемые в целевом функционале. Важным приложением таких постановок выступают задачи трекинга (отслеживания) детерминированных траекторий, см. [72]–[74]. Перейдем к описанию модели системы управления, частным случаем которой является приведенная ранее система (2.1.1)–(2.1.2). Предположим, что задан n-мерный управляемый случайный процесс X_t, $t \geq 0$, описываемый уравнением

$$dX_t = A_t X_t dt + B_t U_t dt + m_t dt + G_t dW_t\,, \quad X_0 = x\,, \tag{2.4.1}$$

где m_t – неслучайный вектор, описание остальных элементов (2.4.1) дается по аналогии со случаем (2.1.1). Также вводится обозначение для множества допустимых управлений $\mathcal{U}$. Целевой функционал за плановый период $[0, T]$ имеет вид

$$J_T(U) = \int_0^T (X_t' Q_t X_t + U_t' R_t U_t + 2q_t' X_t + 2r_t' U_t)\, dt, \tag{2.4.2}$$

где $U \in \mathcal{U}$ – допустимое управление на $[0, T]$; $Q_t \geq 0,\ R_t > 0,\ t \geq 0,$ – симметричные матрицы, q_t, r_t – векторные функции. Для векторных функций m_t, r_t, q_t, задающих неоднородные слагаемые в (2.4.1)–(2.4.2), допускается их неограниченность при $t \to \infty$. Более точно возможный характер их изменения формулируется в следующем предположении.

Предположение 2.4.1 ([69]) *Пусть* $L_T = \|m_T\|^2 + \|q_T\|^2 + \|r_T\|^2$. *Тогда*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{L_T}{\int\limits_0^T L_t\, dt} = 0\,.$$

Согласно предположению 2.4.1, не допускается экстремальный (экспоненциальный) рост коэффициентов неоднородной части. В качестве условий на остальные матрицы налагаются стандартные требования предположения 2.2.1 о стабилизируемости и выявляемости. Тогда существует векторная функция $p_t = \int\limits_t^\infty \Phi'(s,t)[\Pi_s(m_s - B_s R_s^{-1} r_s) + q_s]\, ds$, $t \geq 0$, удовлетворяющая линейному неоднородному уравнению

$$\dot{p}_t + \mathcal{A}_t' p_t + \Pi_t(m_t - B_t R_t^{-1} r_t) + q_t = 0\,, \tag{2.4.3}$$

где $\Phi(t,s)$ – фундаментальная матрица для $\mathcal{A}_t = A_t - B_t R^{-1} B_t' \Pi_t$, матрица $\Pi_t \geq 0, t \geq 0$, удовлетворяет уравнению Риккати (2.1.4). Соответственно, в данном случае можно определить *оптимальный установившийся* закон управления U^* вида

$$U_t^* = -R_t^{-1}[r_t + B_t'(\Pi_t X_t^* + p_t)]\,, \tag{2.4.4}$$

где матрица Π_t удовлетворяет (2.1.4), функция p_t – уравнению (2.4.3), процесс X_t^*, $t \geq 0$, задается уравнением

$$dX_t^* = (A_t - B_t R^{-1} B_t' \Pi_t) X_t^* dt + \mu_t dt + G_t dW_t\,, \quad X_0^* = x\,, \tag{2.4.5}$$

где $\mu_t = m_t - B_t R_t^{-1}(r_t + B_t' p_t)$. В качестве критерия оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени для системы (2.4.1)–(2.4.2) предлагается использовать обобщение долговременного среднего для случая дополнительных неоднородных составляющих в уравнении динамики и целевом функционале. При этом логика построения такого критерия основана на тех же соображениях, что и в разделе 2.1 – наиболее точный учет порядка изменения $EJ_T(U)$ и $J_T(U)$ на управлении U^* при $T \to \infty$:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T (\|G_t\|^2 + L_t)\, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}\,. \tag{2.4.6}$$

Для однородного случая, $L_t \equiv 0$, критерий в (2.4.6) превращается в обобщенное долговременное среднее (см. (2.2.4) и раздел 2.2), в котором учитывается только влияние G_t. Нормировка критерия из (2.4.6) представляет собой меру отклонения (за плановый период) системы управления (2.4.1)–(2.4.2) от детерминированного линейного регулятора без внешних воздействий и линейных слагаемых в целевом функционале ($G_t \equiv 0$, $L_t \equiv 0$).

Один из основных результатов данного раздела касается оптимальности в среднем управления U^* при $T \to \infty$.

Теорема 2.4.1 ([69][4]) *Пусть выполнены предположения* 2.2.1 *и* 2.4.1. *Тогда закон управления U^*, задаваемый в* (2.4.4)–(2.4.5), *является решением задачи* (2.4.6).

Ниже приводится результат об анализе задачи управления с потраекторной версией критерия из (2.4.6), когда рассматривается задача

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{\int\limits_0^T (\|G_t\|^2 + L_t)\, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью } 1\,. \tag{2.4.7}$$

[4] См. Theorem 1 в *Palamarchuk E.* On infinite time linear-quadratic Gaussian control of inhomogeneous systems // 2016 European Control Conference (ECC). IEEE, 2016. P. 2477–2482.

Теорема 2.4.2 ([69][5]) *Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1 и* $\int\limits_0^T (\|G_t\|^2 + L_t)\,dt \to \infty$, $T \to \infty$. *Тогда закон управления* U^*, *задаваемый* (2.4.4)–(2.4.5), *является решением задачи* (2.4.7). *Более того, с вероятностью 1 справедливо равенство*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U^*)}{\int\limits_0^T (\|G_t\|^2 + L_t)\,dt} = \limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U^*)}{\int\limits_0^T (\|G_t\|^2 + L_t)\,dt}\,. \tag{2.4.8}$$

2.5 Системы управления с дисконтированием

В данном разделе приводится ряд результатов по анализу задач оптимального управления системами с дисконтированием, когда в целевом функционале (2.1.2) матрицы имеют вид $Q_t = f_t Q,\ R_t = f_t R,$ где $Q \geq 0,\ R > 0$ – постоянные матрицы, f_t – монотонная дисконтирующая функция. При этом в уравнении динамики (2.1.1) $A_t = A,\ B_t = B$ – также постоянные матрицы. Рассматривается целевой функционал общего вида для задачи трекинга плановых траекторий эволюции состояния и управления:

$$J_T^{(d)}(U) = \int\limits_0^T f_t[(X_t - \tilde{x}_t)'Q(X_t - \tilde{x}_t) + (U_t - \tilde{u}_t)'R(U_t - \tilde{U}_t)]\,dt\,, \tag{2.5.1}$$

где неслучайные векторы $\tilde{x}_t,\ \tilde{u}_t$ задают плановые траектории. Относительно дисконтирующей функции будем предполагать выполненными различные условия.

Предположение 2.5.1 ([68]) *Дисконтирующая функция* $f_t > 0,\ t \geq 0,\ f_0 = 1$:
1) *монотонна, дифференцируема;* f_t *неограниченно возрастает или убывает до нуля при* $t \to \infty$;
2) *ставка дисконтирования* $\phi_t = -\dot{f}_t/f_t$ *является ограниченной функцией при любом* $t \geq 0$ ($\dot{}$ – *производная по времени) и* $\lim\limits_{t\to\infty} \phi_t = c_\phi$, *где* c_ϕ – *константа.*

Отметим, см. [68], что убывающая f_t, т.е. $\phi_t > 0$, соответствует «положительным» временным предпочтениям, в случае «отрицательных» временных предпочтений f_t возрастает ($\phi_t < 0$), если $f_t \equiv 1$ ($\phi_t \equiv 0$), то временные предпочтения – «нулевые», см. Введение. Примеры дисконтирующих функций включают традиционное экспоненциальное дисконтирование $f_t = e^{-rt}$, «гиперболическое» $f_t = 1/(1+\theta t)^{\theta_1/\theta}$, см. [75], возрастающие степенную $f_t = (1+t)^k$ [31] или экспоненциальную $f_t = e^{rt}$, функции [29] и др. ($r, k, \theta, \theta_1 > 0$). Также будет рассмотрен случай убывающей f_t с неограниченной ставкой, см. [62]. В частности, такая специфика дисконтирующей функции может быть связана с сильно нелинейным восприятием времени субъектами или их сверхнетерпеливостью, см. [76] и обзор в [62].

[5] См. Theorem 2 в *Palamarchuk E.* On infinite time linear-quadratic Gaussian control of inhomogeneous systems // 2016 European Control Conference (ECC). IEEE, 2016. P. 2477–2482.

Предположение 2.5.2 ([62]) *Дисконтирующая функция* $f_t > 0,\ t \geq 0,\ f_0 = 1,$ *дважды дифференцируема, монотонно убывает и является логарифмически вогнутой* $((\ln f_t)'' < 0)$. *Ставка дисконтирования* $\phi_t = -\dot{f}_t/f_t$ *такова, что* $\phi_t \to \infty,\ t \to \infty$.

Сформулируем далее предположение о поведении плановых траекторий.

Предположение 2.5.3 ([69])

$$\lim_{T\to\infty} \frac{f_T(\|\tilde{x}_T\|^2 + \|\tilde{u}_T\|^2)}{\int\limits_0^T f_t(\|\tilde{x}_t\|^2 + \|\tilde{u}_t\|^2)\,dt} = 0\,.$$

Анализ систем управления с дисконтированием проводится путем замены переменных и сведением к системам с измененной матрицей диффузии. Тогда соответствующая *оптимальная установившаяся стратегия* управления определяется в виде

$$U_t^* = -R^{-1}B'(\Pi_t X_t^* + \tilde{p}_t) + \tilde{u}_t\,, \tag{2.5.2}$$

где $\Pi_t \geq 0,\ t \geq 0,$ удовлетворяет уравнению Риккати (2.1.4) при $A_t = A - (1/2)\phi_t I$, $B_t = B,\ Q_t = Q,\ R_t = R,$ функция $\tilde{p}_t$ задается как

$$\tilde{p}_t = \int\limits_t^\infty \frac{f_s}{f_t}\Psi'(s,t)(\Pi_s B\tilde{u}_s - Q\tilde{x}_s)\,ds\,, \tag{2.5.3}$$

где $\Psi(t,s)$ соответствует матрице $\tilde{\mathcal{A}}_t = A - BR^{-1}B'\Pi_t$, процесс X_t^*, $t \geq 0$, определяется уравнением

$$dX_t^* = (A - BR^{-1}B'\Pi_t)X_t^* dt + B(\tilde{u}_t - R^{-1}B'\tilde{p}_t)dt + G_t dW_t\,, \quad X_0^* = x\,. \tag{2.5.4}$$

Ниже формулируются утверждения об оптимальности U^* на бесконечном интервале времени.

Теорема 2.5.1 ([69][6]) *Пусть выполнено предположение* 2.2.1 *при* $A_t = A,\ B_t = B,$ $Q_t = Q,\ R_t = R,\ G_t = G,$ *а также предположение* 2.5.1 *для невозрастающей* f_t. *Тогда стратегия управления* U^*, *задаваемая* (2.5.2)–(2.5.4), *является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T^{(d)}(U)}{\int\limits_0^T f_t(\|\tilde{x}_t\|^2 + \|\tilde{u}_t\|^2 + \|G\|^2)\,dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}\,. \tag{2.5.5}$$

Если при этом $\int\limits_0^T f_t(\|\tilde{x}_t\|^2 + \|\tilde{u}_t\|^2 + \|G\|^2)\,dt \to \infty,\ T \to \infty,$ *то управление* U^* *также является решением задачи с потраекторным критерием*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(d)}(U)}{\int\limits_0^T f_t(\|\tilde{x}_t\|^2 + \|\tilde{u}_t\|^2 + \|G\|^2)\,dt} \to \inf_{\tilde{U}\in\mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью 1.} \tag{2.5.6}$$

[6] См. Theorem 3 в *Palamarchuk E.* On infinite time linear-quadratic Gaussian control of inhomogeneous systems // 2016 European Control Conference (ECC). IEEE, 2016. P. 2477–2482.

Теорема 2.5.2 ([68][7]) *Пусть выполнено предположение 2.2.1 при* $A_t = A - (1/2)\phi_t$, $B_t = B,\ Q_t = Q,\ R_t = R,\ G_t = G$, *а также предположение 2.5.1 и* $A\tilde{x}_0 + B\tilde{u}_0 = 0$ *при* $\tilde{x}_t \equiv x_0,\ \tilde{u}_t \equiv u_0$. *Тогда для стратегии управления* U^*, *задаваемой* (2.5.2)–(2.5.4), *выполняется соотношение*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T^{(d)}(U^*)}{\int\limits_0^T f_t\,dt} \le \limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T^{(d)}(U)}{\int\limits_0^T f_t\,dt} + c_J\,, \tag{2.5.7}$$

при любом $U \in \mathcal{U}$ *и некоторой константе* $c_J \geq 0$ (c_J *не зависит от управления*). *При этом* $c_J = 0$, *если в предположении 2.5.1 константа* $c_\phi \geq 0$ *и* $c_J > 0$ *для* $c_\phi < 0$. *Кроме того* [65], *если* $\int\limits_0^T f_t\,dt \to \infty,\ T \to \infty$, *и* f_t *– не возрастает, то* U^* *также оптимально в задаче с потраекторным критерием*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(d)}(U)}{\int\limits_0^T f_t\,dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}\,, \quad \text{с вероятностью } 1.$$

.

Теорема 2.5.3 ([62][8]) *[8] Пусть выполнено предположение 2.5.2 и* $\tilde{x}_t \equiv 0,\ \tilde{u}_t \equiv 0$. *Тогда стратегия управления* U^*, *задаваемая* (2.5.2)–(2.5.4), *является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T^{(d)}(U)}{\int\limits_0^T (f_t/\phi_t)\|G_t\|^2\,dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}\,. \tag{2.5.8}$$

Заметим, что критерии в (2.5.5)–(2.5.8) основаны на понятии накопленного дисконта. При этом в (2.5.8) дисконтирование происходит по более высокой ставке в силу предположения 2.5.2. Соотношение (2.5.7) при $c_J > 0$, т.е. f_t в виде возрастающей экспоненты, является аналогом δ-оптимальности для задач управления диффузионными процессами на бесконечном интервале времени из работы [77].

2.6 Оптимальное управление системой с двусторонним целевым функционалом

В этом разделе приводятся результаты анализа линейной стохастической системы управления на интервале $[-T, T]$ при $T \to +\infty$. Такая постановка обусловлена как теоретико-

[7] См. Theorem 1 в *Palamarchuk E.S.* Stabilization of linear stochastic systems with a discount: modeling and estimation of the long-term effects from the application of optimal control strategies // Mathematical Models and Computer Simulations. 2015. Vol. 7. No. 4. P. 381–388.

[8] См. Theorem 2 в *Palamarchuk E.S.* Optimization of the superstable linear stochastic system applied to the model with extremely impatient agents // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 3. P. 439–450.

операторными аспектами изучения линейных систем управления, см. [38], так и конкретными областями приложений (передача информации в сетях [39], инженерные системы [40] и др.). Изложение основано на работе [78]. Применяемый критерий оптимальности представляет собой обобщенное долговременное среднее, при этом для матрицы диффузии, в отличие в рассмотренного ранее случая стандартного линейного регулятора из раздела 2.2, допускается ее неограниченный рост во времени. Опишем систему управления из [78], исследуемую далее. Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан n-мерный случайный процесс X_t, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, описываемый уравнением

$$dX_t = A_t X_t dt + B_t U_t dt + G_t dW_t\,, \tag{2.6.1}$$

где A_t, B_t – ограниченные матрицы с зависящими от времени элементами; шумовые воздействия моделируются с помощью так называемого двустороннего винеровского процесса W_t, $t \in \mathbb{R}$, задаваемого как $W_t = W_t^{(1)}$, $t \geq 0$, и $W_t = W_{-t}^{(2)}$, $t < 0$, при двух независимых d-мерных стандартных винеровских процессах $W_t^{(1)}$, $W_t^{(2)}$, $t \geq 0$, см., например, [79, p. 7]; множество допустимых управлений $\mathcal{U}$ состоит из k-мерных квадратично интегрируемых случайных процессов U_t, $t \in \mathbb{R}$, согласованных с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s,\ s \leq t\}$ ($\sigma(\cdot)$ – знак σ-алгебры), таких что существует решение уравнения (2.6.1); G_t – матрица диффузии, о предположениях относительно ее элементов будет сказано далее, а здесь отметим, что в рассмотрение могут включаться ситуации как ограниченных параметров возмущений (например, постоянных $G_t \equiv G$ или затухающих $\|G_t\| \to 0$), так и нарастающих $\|G_t\| \to \infty$, $t \to \pm\infty$.

Для $T > 0$ в качестве двустороннего целевого функционала на $[-T, T]$ определим случайную величину

$$J_{2T}(U) = \int_{-T}^{T} (X_t' Q_t X_t + U_t' R_t U_t)\, dt, \tag{2.6.2}$$

где $U \in \mathcal{U}$ – допустимое управление; $Q_t \geq qI$, $R_t \geq \rho I$, $t \in \mathbb{R}$, – ограниченные симметричные матрицы, $q, \rho > 0$ – некоторые константы. При рассмотрении задач стохастического линейного регулятора при $T \to +\infty$ будем использовать критерии обобщенных долговременных средних:

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{EJ_{2T}(U)}{\int_{-T}^{T} \|G_t\|^2\, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \tag{2.6.3}$$

и

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{J_{2T}(U)}{\int_{-T}^{T} \|G_t\|^2\, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \text{ с вероятностью 1.} \tag{2.6.4}$$

Вновь отметим, что в этих критериях учитывается специфика изменения матрицы диффузии G_t: например, ее неограниченность на бесконечности, как в когнитивной модели [11], или ее вырождение, см. случай диффузии [15]. Сформулируем предположения о коэффициентах (2.6.1)–(2.6.2), в рамках которых будут получены основные результаты.

Предположение 2.6.1 *Пара матриц* (A_t, B_t) *является (экспоненциально) стабилизируемой при* $t \in \mathbb{R}$.

Экспоненциальная стабилизируемость пары (A_t, B_t) при $t \in \mathbb{R}$, см., например, [38], определяется по аналогии со случаем $t \geq 0$, см. определение 2.2.1 для $t \in \mathbb{R}$. Далее формулируется предположение относительно параметров возмущений, т.е. матрицы G_t, $t \in \mathbb{R}$. Введем множество $\mathcal{T} = \{-\infty; +\infty; \pm\infty\}$ и запись $t \to \mathcal{T}$ будем использовать для сокращенного обозначения ситуаций $t \to -\infty$, $t \to +\infty$ или $t \to \pm\infty$.

Предположение 2.6.2 ([78]) *Для элементов матрицы диффузии* G_t *выполняется одно из следующих условий:*

1) G_t – *ограничена при* $t \to \mathcal{T}$;
2) $\|G_t\| \to +\infty$, G_t – *дифференцируема, при этом* $d \ln \|G_t\|/dt \to 0$, $t \to \mathcal{T}$.

В условиях предположения 2.6.1, см. [38], существует управление U^* вида (2.1.5), $t \in \mathbb{R}$, при этом симметричная ограниченная матрица $\Pi_t \geq \bar{p}I$, $\bar{p} > 0$ – константа, удовлетворяет уравнению Риккати (2.1.4), $t \in \mathbb{R}$. Соответствующий процесс X_t^*, $t \in \mathbb{R}$, задается уравнением (2.1.6) без начального условия, т.е.

$$dX_t^* = (A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t) X_t^* dt + G_t dW_t \,. \tag{2.6.5}$$

При анализе задачи (2.6.4) для случая $\|G_t\| \to \infty$, $t \to \mathcal{T}$, потребуется выполнение более сильного условия, чем сформулированное в п. 2 предположения 2.6.2.

Предположение 2.6.3 ([78]) *Пусть в п.* 2) *предположения* 2.6.2 *выполнено соотношение* $d \ln \|G_t\|/dt \cdot \ln |t| (\ln \ln |t| + \ln \ln \|G_t\|) \to 0$, $t \to \mathcal{T}$, *и при этом* $\|G_t\|$ *является монотонной функцией,* $t \to \mathcal{T}$.

В следующей теореме приводится результат об оптимальности управления U^*.

Теорема 2.6.1 ([78][9]) *Пусть выполнены предположения* 2.6.1 *и* 2.6.2. *Тогда закон управления* U^*, *задаваемый* (2.1.5),(2.6.5), *является решением задачи*

$$\limsup_{T \to +\infty} \frac{E J_{2T}(U)}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2 \, dt} \to \inf_{U \in \mathcal{U}} , \tag{2.6.6}$$

[9] См. Theorem 1, Theorem 2 в *Palamarchuk E.S.* Optimal controller for a nonautonomous linear stochastic system with a two-sided cost functional // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81. No. 1. P. 53–63.

при этом

$$0 < \limsup_{T\to+\infty} \frac{EJ_{2T}(U^*)}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\,dt} = \limsup_{T\to+\infty} \frac{\int\limits_{-T}^{T} tr(G_t'\Pi_t G_t)\,dt}{\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\,dt} < \infty\,. \tag{2.6.7}$$

Если выполнено предположение 2.6.3 и $\int\limits_{-T}^{T} \|G_t\|^2\,dt \to \infty,\ T\to+\infty,$ *то управление* U^* *также является решением задачи* (2.6.4).

Согласно результату теоремы 2.6.1, $\limsup\limits_{T\to+\infty}\{EJ_{2T}(U)/(\int\limits_{-T}^{T}\|G_t\|^2\,dt)\} \geq J^*,$ где константа $J^* > 0$. Следовательно, при $\|G_t\|\to\infty,\ t\to\mathcal{T}$, также становится очевидной неприменимость критерия долговременного среднего, так как $\limsup\limits_{T\to+\infty}\{EJ_{2T}(U)/(2T)\} = +\infty,$ для любого допустимого управления $U\in\mathcal{U}$.

2.7 Оптимальное управление при неограниченной матрице состояния

В данном разделе представлены результаты анализа линейной стохастической системы управления в предположении о неограниченности матрицы A_t в уравнении состояния на бесконечности, т.е. при $\|A_t\|\to\infty,\ t\to\infty$. Такая специфика матрицы может возникнуть как результат линеаризации [80, Section 5.4], при изучении общей теории линейных систем [34], конкретных моделей [10], [12], [35], а также при включении дисконтирования по неограниченной ставке, также см. ссылки в работах [62] и [63]. Вначале стоит отметить, что матрицы при $\|A_t\|\to\infty,\ t\to\infty,$ могут обладать свойствами асимптотической устойчивости/неустойчивости, существенно отличными от традиционных экспоненциальных характеристик. Приведем необходимые определения.

Определение 2.7.1 ([62]) *Матрица $\mathcal{A}_t$ называется суперэкспоненциально устойчивой с темпом δ_t (δ_t-суперэкспоненциально устойчивой), если существует функция* $\delta_t > 0,\ t\geq 0,\ \ \delta_t\to\infty,\ t\to\infty,\ \limsup\limits_{t\to\infty}(\|\mathcal{A}_t\|/\delta_t) < \infty,\ \|\Phi(t,s)\| \leq \kappa\exp\{-\int\limits_{s}^{t}\delta_v\,dv\}\,,\ s\leq t\,,$ *для некоторой константы $\kappa > 0$, при этом $\Phi(t,s)$ – фундаментальная матрица, соответствующая $\mathcal{A}_t$.*

Обратимся к основным характеристикам понятия неустойчивости матриц. В частности, при этом возможно асимптотически неограниченное возрастание нормы фундаментальной матрицы. В целях уточнения характера неустойчивости используется понятие антиустойчивости, связанное с теорией операторов, см., например, [81, p. 11].

Определение 2.7.2 ([63]) *Матрица $\tilde{\mathcal{A}}_t$ называется суперэкспоненциально антиустойчивой с темпом δ_t, если матрица $\mathcal{A}_t = -\tilde{\mathcal{A}}_t'$ является суперэкспоненциально устойчивой с темпом δ_t.*

Суперэкспоненциально устойчивые матрицы также естественно назвать суперустойчивыми, а антиустойчивые – супернеустойчивыми. В рамках данного раздела будут рассмотрены случаи суперэкспоненциально устойчивых и суперэкспоненциально антиустойчивых матриц A_t. В обоих ситуациях исследуемые системы управления не удовлетворяют стандартным предположениям раздела 2.2. В соответствии с *Алгоритмом анализа*, с. 20, требуется установить существование решения уравнения Риккати (2.1.4), определить его верхнюю границу (п. 1), а затем построить (п. 4) соответствующий критерий оптимальности (2.1.12), корректирующий обобщенное долговременное среднее (2.2.4). Также будет проведен анализ условий для *overtaking* оптимальности в среднем (см. определение 2.1.1).

Предположение 2.7.1 ([62]) *Матрица A_t является суперэкспоненциально устойчивой с темпом δ_t, при этом δ_t – неубывающая дифференцируемая функция, $t \geq 0$; матрицы B_t, Q_t, R_t – ограничены, $t \geq 0$, $R_t \geq \rho I$, $\rho > 0$ – некоторая константа.*

Предположение 2.7.2 ([63]) *Матрица A_t является суперэкспоненциально антиустойчивой с темпом δ_t, при этом δ_t – неубывающая дифференцируемая функция, $t \geq 0$, и $\lim\limits_{t\to\infty}(\dot{\delta}_t/\delta_t^2) = 0$. Ограниченная матрица B_t такая, что $B_t B_t' \geq bI$ при $t \geq 0$, где $b > 0$ – некоторая константа. В функционале (2.1.2) матрицы $Q_t \geq qI$, $R_t \geq \rho I$, $t \geq 0$, где $q, \rho > 0$ – некоторые константы.*

В следующей лемме устанавливается существование решения (2.1.4) для случая A_t из предположений 2.7.1 и 2.7.2.

Лемма 2.7.1 ([62][10),[63][11)) *Пусть выполнено предположение 2.7.1 или 2.7.2. Тогда существует абсолютно непрерывная функция Π_t, $t \geq 0$, со значениями в множестве неотрицательно определенных симметричных матриц, удовлетворяющая уравнению Риккати (2.1.4) и такая, что матрица $A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t$ является $\tilde{\delta}_t$-суперэкспоненциально устойчивой с $\tilde{\delta}_t = \lambda\delta_t$, где δ_t – темп устойчивости или антиустойчивости*

[10)] См. Lemma в *Palamarchuk E.S.* Optimization of the superstable linear stochastic system applied to the model with extremely impatient agents // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 3. P. 439–450.

[11)] См. Lemma в *Palamarchuk E.S.* On the optimal control problem for a linear stochastic system with an unstable state matrix unbounded at infinity // Automation and Remote Control. 2019. Vol. 80. No. 2. P. 250–261 *матрицы A_t, а λ – некоторая положительная константа. При этом также справедливо соотношение $\limsup\limits_{t\to\infty}(\|\Pi_t\|/p_t) < \infty$, где функция $p_t = 1/\delta_t$ для суперустойчивой A_t и $p_t = \delta_t$ для супернеустойчивой A_t.*

В дополнение к предположению 2.7.2 также введем техническое условие.

Предположение 2.7.3 ([63])

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\delta_T \|G_T\|^2}{\int\limits_0^T \delta_t \|G_t\|^2\,dt}\delta_T = 0\,. \tag{2.7.1}$$

В приводимом ниже утверждении характеризуется оптимальность в среднем установившегося закона управления U^* на бесконечном интервале времени.

Теорема 2.7.1 ([62][12),[63][13)) *Пусть выполнено предположение 2.7.1 или 2.7.2,2.7.3. Тогда закон управления U_t^*, задаваемый (2.1.5)–(2.1.6) является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T p_t \|G_t\|^2\,dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}\,, \tag{2.7.2}$$

где функция $p_t = 1/\delta_t$ для суперустойчивой A_t и $p_t = \delta_t$ для супернеустойчивой A_t. Кроме того, если в случае суперустойчивой матрицы A_t, $\|G_t\|/\delta_t^2 \to 0$, $t\to\infty$, или $\|G_t\|\delta_t \to 0$, $t\to\infty$, при супернеустойчивой A_t, то управление U^* также является overtaking оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени.

Критерий в (2.7.2) можно назвать скорректированным обобщенным долговременным средним, при этом корректировка осуществляется в сторону уменьшения подынтегрального выражения для суперустойчивой матрицы A_t и увеличивается – для супернеустойчивой A_t.

2.8 Оптимальное управление при обратно пропорциональной динамике матриц в целевом функционале

В данном разделе излагаются основные результаты анализа случайного процесса по типу модели управляемого броуновского движения [67]. Точнее, матрица A_t в уравнении

[12)] См. Theorem 1 в *Palamarchuk E.S.* Optimization of the superstable linear stochastic system applied to the model with extremely impatient agents // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 3. P. 439–450.

[13)] См. Theorem в *Palamarchuk E.S.* On the optimal control problem for a linear stochastic system with an unstable state matrix unbounded at infinity // Automation and Remote Control. 2019. Vol. 80. No. 2. P. 250–261

(2.1.1) является абсолютно интегрируемой (по норме) на бесконечности. В частности, такие системы возникают в физических [14], [82] и финансовых [83] приложениях. При этом для интегрального квадратичного целевого функционала предполагается возможность разнонаправленного учета издержек, относящихся к состоянию и управлению, с приоритетностью затрат на управление. Значимость потерь из-за отклонения состояния со временем падает, а для издержек по управлению, наоборот, – растет. Для каждого $T > 0$ в качестве целевого функционала (2.1.2) определяется случайная величина

$$J_T(U) = \int\limits_0^T (\frac{1}{\beta_t} X_t' Q X_t + \beta_t U_t' R U_t)\, dt, \tag{2.8.1}$$

где $U \in \mathcal{U}$ – допустимое управление на интервале $[0, T]$; $Q \geq 0$, $R > 0$ – симметричные матрицы; $\beta_t > 0$, $t \geq 0$, – функция, задающая приоритет разных видов издержек в момент времени t. При этом β_t – достаточно быстро возрастающая функция. Точнее, параметры системы управления (2.1.1)–(2.1.2) удовлетворяют следующему предположению.

Предположение 2.8.1 ([67]) *Матрица A_t в уравнении динамики состояния* (2.1.1) *такова, что $\int\limits_0^\infty \|A_t\|\, dt < \infty$. Для функции β_t в целевом функционале* (2.8.1) *выполняются условия $\beta_t > 0$, $t \geq 0$, $\beta_t \to \infty$ при $t \to \infty$ и $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\beta_t}\, dt < \infty$.*

При анализе системы управления, $T \to \infty$, будем пользоваться последовательностью шагов из *Алгоритма анализа*, с. 20. Ввиду наличия в целевом функционале (2.8.1) как неограниченных во времени ($\beta_t R$), так и сингулярных ($(1/\beta_t)Q$) матриц издержек, требуется отдельно установить существование решения уравнения Риккати (2.1.4).

Лемма 2.8.1 ([67][14]) *Пусть выполнено предположение 2.8.1. Тогда существует функция Π_t, $t \geq 0$, принимающая значения в множестве симметричных неотрицательно определенных матриц, удовлетворяющая дифференциальному уравнению Риккати* (2.1.4) *при $Q_t = 1/\beta_t$, $R_t = \beta_t R$ и такая, что $\limsup\limits_{t\to\infty} \{\|\Pi_t\|/p_t\} < \infty$, где $p_t = \int\limits_t^\infty \frac{1}{\beta_t}\, dt$. Если при этом $Q > 0$, то $\liminf\limits_{t\to\infty} \{\|\Pi_t\|/p_t\} > 0$.*

Следовательно, можно определить U^* в виде (2.1.5)–(2.1.6) и затем использовать критерии скорректированных обобщенных долговременных средних (2.1.12), (2.1.13) для выявления свойств оптимальности U^* при $T \to \infty$. Как показано в [67], оптимальный процесс X_t^* $t \geq 0$, при этом по своим свойствам будет близок к винеровскому процессу с измененным временем.

[14] См. Lemma 1 в *Palamarchuk E.S.* On optimal stochastic linear quadratic control with inversely proportional time-weighting in the cost // Theory of Probability & Its Applications. 2022. Vol. 67. No. 1. P. 28–43.

Предположение 2.8.2 ([67]) *Для* $p_t = \int\limits_t^{\infty} \frac{1}{\beta_s}\, ds$ *и матрицы диффузии* G_t *выполняются соотношения*

1) $\int\limits_0^T p_t \|G_t\|^2\, dt \to \infty\,,\ T \to \infty$;

2) $\limsup\limits_{t\to\infty} \{\beta_t \|G_t\|^2 p_t^2\} < \infty$.

Теорема 2.8.1 ([67][15]) *Пусть выполнено предположение 2.8.1. Тогда закон управления* U^**, задаваемый (2.1.5)–(2.1.6), является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T p_t \|G_t\|^2\, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \tag{2.8.2}$$

с $p_t = \int\limits_t^{\infty} \frac{1}{\beta_s}\, ds$ *и без ограничений на элементы матрицы диффузии* G_t*. Если при этом выполнено предположение 2.8.2, то закон управления* U^* *также является решением задачи с потраекторным критерием:*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T(U)}{\int\limits_0^T p_t \|G_t\|^2\, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \ \text{с вероятностью } 1\,. \tag{2.8.3}$$

2.9 Об инвариантности оптимального управления для одного класса стохастических линейных регуляторов

В этом разделе приводятся результаты анализа линейной стохастической системы управления (2.1.1)–(2.1.2) для специальных случаев зависимости коэффициентов от времени. Рассматриваются ситуации домножения всех матриц системы на одинаковую функцию времени (т.е. динамическое масштабирование параметров [84]). В роли этой функции может выступать и случайный процесс, тогда соответствующая система управления возникает из-за включения в анализ стохастической временной шкалы, см. [85]. Оказывается, что при таких предположениях оптимальное управление U^* будет инвариантно относительно используемого множителя и вид U^* совпадает с видом оптимальной стратегии для автономной системы. Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ задан скалярный случайный процесс $\alpha_t,\ t \geq 0,$ имеющий с вероятностью 1 непрерывные и положительные траектории. Тогда стохастическая временная шкала определяется как почти наверное возрастающий процесс $\tau_t = \int\limits_0^t \alpha_v\, dv,\ t \geq 0,$

[15] См. Theorem 1, Theorem 2 в *Palamarchuk E.S.* On optimal stochastic linear quadratic control with inversely proportional time-weighting in the cost // Theory of Probability & Its Applications. 2022. Vol. 67. No. 1. P. 28–43.

или в дифференциальной форме

$$d\tau_t = \alpha_t\, dt, \quad \tau_0 = 0\,. \tag{2.9.1}$$

В качестве α_t, $t \geq 0$, могут рассматриваться различные процессы, подробнее см. [85]. Процесс τ_t, $t \geq 0$, носит название «внутреннего» времени в отличие от физического или реального времени t.

Предположение 2.9.1 ([85]) *Случайный процесс $\alpha_t > 0$, $t \geq 0$, задающий временную шкалу в (2.9.1), имеет непрерывные (с вероятностью 1 и в среднем квадратичном) траектории и при этом $\int\limits_0^t \alpha_v\, dv \to \infty$, $t \to \infty$, п.н.*

Ситуация детермированной функции α_t рассматривалась в работе [84]. Как показано в [85], включение стохастической временной шкалы τ_t в систему управления $(Y_\tau(\bar U), J_{\mathcal{T}}(\bar U))$, известную как автономный стохастический линейно-квадратический регулятор, $dY_\tau = AY_\tau d\tau + B\bar U_\tau d\tau + Gd\hat W_\tau$, $J_{\mathcal{T}}(\bar U) = \int\limits_0^{\mathcal{T}} (Y_\tau' Q Y_\tau + \bar U_\tau' R \bar U_\tau)\, d\tau$, приводит к уравнениям динамики (2.1.1) и целевому функционалу (2.1.2), но со случайными коэффициентами:

$$dX_t = \alpha_t A X_t dt + \alpha_t B U_t dt + \sqrt{\alpha_t} G dW_t\,, \qquad X_0 = x, \tag{2.9.2}$$

$$J_T^{(\alpha)}(U) = \int\limits_0^T \alpha_t (X_t' Q X_t + U_t' R U_t)\, dt, \tag{2.9.3}$$

где в качестве допустимых управлений U_t, $t \geq 0$, рассматриваются такие $\bar{\mathcal{F}}_t$-согласованные процессы $\bar{\mathcal{F}}_t = \sigma\{W_s, \alpha_s,\, s \leq t\}$, что уравнение (2.9.2) имеет решение. Множество допустимых управлений также обозначим через $\mathcal{U}$. Ранее линейные системы вида (2.9.2) со случайными коэффициентами (без управляющих воздействий) изучались при моделировании в области физики [36], финансов [37] и механики [86], для детерминированной α_t – в когнитивных исследованиях, см. [12], и эконометрическом моделировании [17]–[18], [87]. При $T \to \infty$ рассматриваются задачи управления

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T^{(\alpha)}(U)}{E\left(\int\limits_0^T \alpha_t\, dt\right)} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}, \quad \limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\int\limits_0^T \alpha_t\, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{с вероятностью 1.} \tag{2.9.4}$$

Полезно отметить, что во внутреннем времени (без учета (2.9.1)) задачи (2.9.4) имели бы вид задач управления с долговременными средними. Основной результат о существовании решения задач (2.9.4) в виде инвариантного по времени закона управления $U^* = -R^{-1}B'\bar\Pi X^*$, где $\bar\Pi \geq 0$ – решение алгебраического уравнения Риккати, приводится в следующем утверждении.

Теорема 2.9.1 ([85][16),[84][17)) *Пусть выполнено предположение 2.2.1 для матриц $A_t = A$, $B_t = B$, $Q_t = Q$, $R_t = R$, а также предположение 2.9.1. Тогда закон управления U^*, определенный в (2.1.5)–(2.1.6), будет являться решением задач (2.9.4). При этом*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{EJ_T^{(\alpha)}(U^*)}{E\left(\int\limits_0^T \alpha_t\,dt\right)} = \lim_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U^*)}{\int\limits_0^T \alpha_t\,dt} = tr(G'\bar{\Pi}G) \quad \text{п.н.}\,,$$

где симметричная матрица $\bar{\Pi} \geq 0$ является решением алгебраического уравнения Риккати $A'\bar{\Pi} + \bar{\Pi}A - \bar{\Pi}BR^{-1}B'\bar{\Pi} + Q = 0$.

В следующем замечании из [85] описывается возможность перехода к неслучайным нормировкам и вид соответствующих задач управления, конкретные примеры из приложений также приведены в [85].

Замечание 1 ([85]) 1. Пусть для случайного процесса α_t, $t \geq 0$, выполняются соотношения $\limsup\limits_{T\to\infty}\{\int\limits_0^T \alpha_t\,dt/\Gamma_T^{(+)}\} = c^{(+)} > 0$ или $\liminf\limits_{T\to\infty}\{\int\limits_0^T \alpha_t\,dt/\Gamma_T^{(-)}\} = c^{(-)} > 0$ с вероятностью 1; $\Gamma_T^{(+)}$, $\Gamma_T^{(-)}$ – положительные детерминированные функции, $c^{(+)}$, $c^{(-)}$ – константы. Тогда вместо потраекторной оптимизации в (2.9.4) можно рассмотреть задачи

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\Gamma_T^{(+)}} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{или} \quad \liminf_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{\Gamma_T^{(-)}} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}\,.$$

Значения критериев на оптимальном управлении U^* будут при этом равны соответственно $\limsup\limits_{T\to\infty}\{J_T^{(\alpha)}(U)/\Gamma_T^{(+)}\} = c^{(+)}tr(G'\bar{\Pi}G)$ и $\liminf\limits_{T\to\infty}\{J_T^{(\alpha)}(U)/\Gamma_T^{(-)}\} = c^{(-)}tr(G'\bar{\Pi}G)$.

2. Пусть $T^{-1}\int\limits_0^T \alpha_t \to \bar{\alpha}$ п.н. и $T^{-1}\int\limits_0^T E\alpha_t \to E\bar{\alpha}$, $T \to \infty$, где $\bar{\alpha} > 0$ – некоторая случайная величина. В этом случае (2.9.4) заменяются на задачи с критериями долговременных средних:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T^{(\alpha)}(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \quad \text{и} \quad \limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(\alpha)}(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}\,,$$

но здесь $\lim\limits_{T\to\infty}\{T^{-1}EJ_T^{(\alpha)}(U^*)\} = (E\bar{\alpha})tr(G'\bar{\Pi}G)$ и $\lim\limits_{T\to\infty}\{T^{-1}J_T^{(\alpha)}(U^*)\} = \bar{\alpha}\,tr(G'\bar{\Pi}G)$, т.е. детерминированная нормировка приводит к различию в значениях двух критериев на U^*, одно из долговременных средних будет являться случайной величиной.

[16) См. Theorem в *Palamarchuk E.S.* Optimal control for a linear quadratic problem with a stochastic time scale // Automation and remote control. 2021. Vol. 82. No. 5. P. 759–771.

[17) См. Theorem 2 в *Palamarchuk E.S.* Time invariance of optimal control in a stochastic linear controller design with dynamic scaling of coefficients // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2021. Vol. 60. No. 2. P. 202–212.

2.10 Анализ асимптотического поведения траекторий линейных стохастических систем

В этой части работы представлены результаты по анализу асимптотического поведения решений линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с переменными коэффициентами. Проведенные исследования, см. в [41] и [88], были направлены на поиск верхних функций, с вероятностью единица мажорирующих траектории процессов при стремлении параметра времени к бесконечности. К рассмотрению предлагаются как случаи только аддитивных возмущений, см. [41], т.е. уравнения процессов по типу (2.1.6), так и возможность добавления мультипликативных шумов, что сразу расширяет спектр приложений, см. [88].

2.10.1 Случай аддитивных возмущений

Вначале опишем класс рассматриваем линейных СДУ, представляющих собой процессы вида (2.1.6) в случае неэкспоненциально устойчивой матрицы $\mathcal{A}_t$ и с возможностью включения в анализ неограниченной или сингулярной матрицы диффузии G_t при $t \to \infty$. Предполагается, что задан n-мерный случайный процесс Z_t, $t \geq 0$, описываемый линейным СДУ

$$dZ_t = \mathcal{A}_t Z_t dt + G_t dW_t \,, \qquad Z_0 = z, \tag{2.10.1}$$

где начальное состояние z неслучайно; W_t, $t \geq 0$, – d-мерный стандартный винеровский процесс; $\mathcal{A}_t$, G_t, $t \geq 0$, – матрицы соответствующих размерностей, такие что существует решение (2.10.1). При этом также предполагается, что $\int\limits_0^\infty \|G_t\|^2 \, dt > 0$. Как было сказано выше, рассматривается ситуация, когда матрица $\mathcal{A}_t$ обладает свойством устойчивости более общим, чем экспоненциальная. Ранее в разделе 2.7 уже было введено определение одного из таких видов устойчивости – суперэкспоненциального (см. определение 2.7.1). В общем случае неэкспоненциальный тип устойчивости характеризуется темпом $\delta_t > 0$ с подробной формулировкой в следующем определении.

Определение 2.10.1 ([41]) *Матрица $\mathcal{A}_t$ называется устойчивой с темпом $\delta_t > 0$ (или δ_t-устойчивой), если*

(i) $\limsup\limits_{t\to\infty} (\|\mathcal{A}_t\|/\delta_t) < \infty$*;*

(ii) *существует константа $\kappa > 0$, такая что*

$$\|\Phi(t,s)\| \leq \kappa \exp\{-\int\limits_s^t \delta_v \, dv\} \,, \qquad s \leq t \,,$$

где $\Phi(t,s)$ – фундаментальная матрица, соответствующая $\mathcal{A}_t$.

(iii) $\int\limits_0^t \delta_s \, ds \to \infty, \ t \to \infty.$

Заметим, что экспоненциальная устойчивость соответствует $\delta_t \equiv \kappa_1$ ($\kappa_1 > 0$ – некоторая константа). При $\delta_t \to 0$, $t \to \infty$, имеем более слабую субэкспоненциальную устойчивость, см. случай [66], а если $\delta_t \to \infty$, $t \to \infty$, то тип устойчивости – сильнее, так называемый суперэкспоненциальный (соответствующую терминологию, связанную с экспонентами Ляпунова, см., например, в работе [89], посвященной анализу нелинейных скалярных дифференциальных уравнений).

Стоит отметить, что уравнение типа (2.10.1) относится к классу уравнений, задающих процесс Орнштейна–Уленбека с переменными коэффициентами. Исследование асимптотического поведения решений (2.10.1) мотивировано широким использованием таких процессов в различных приложениях, см. обзор в [41], а также раздел 2.11.1, посвященный моделированию аномальных диффузий. Относительно коэффициентов (2.10.1) далее будем предполагать выполненным следующее общее требование.

Предположение 2.10.1 ([41]) *Матрица $\mathcal{A}_t$ является устойчивой с темпом δ_t, для матрицы диффузии G_t выполнено условие $\limsup\limits_{t\to\infty} (\|G_t\|^2/\delta_t) < \infty$.*

Из предположения 2.10.1 следует, что $\limsup\limits_{t\to\infty} E\|Z_t\|^2 < \infty$. Как было сказано ранее, при анализе асимптотического поведения решений линейных СДУ используется известный подход, состоящий в построении верхних функций для случайных процессов.

Определение 2.10.2 ([41]) *Детерминированная функция $h_t > 0$ описывает верхнюю функцию скалярного процесса $\bar{Z}_t$, $t \geq 0$, если с вероятностью 1 выполняется соотношение*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\bar{Z}_t}{h_t} < \bar{c} < \infty\,, \tag{2.10.2}$$

где $\bar{c} > 0$ – некоторая неслучайная константа. Например, из закона повторного логарифма для винеровского процесса, [90, Теорема 8, с. 91], функция $h_t = \sqrt{t \ln\ln t}$ при $\bar{Z}_t = \|W_t\|$. Если $h_t \to 0$, то $\limsup\limits_{t\to\infty} \bar{Z}_t \leq 0$ с вероятностью 1. Также, зная h_t, можно определить нормировку $\tilde{\Gamma}_T$, при которой $\bar{Z}_t/\tilde{\Gamma}_t \to 0$, п.н., $t \to \infty$. В данном случае полагаем, что $\bar{Z}_t = \|Z_t\|^2$, и далее проведем обобщение известной логарифмической оценки $h_t = \ln t$, ранее полученной для уравнения (2.1.6) с ограниченными коэффициентами, см. [51]. В условиях предположения 2.10.1 при некоторой положительной константе $\gamma < 1/2$ определим ограниченную функцию d_t в виде

$$d_t = \int\limits_0^t \exp\{-2\gamma \int\limits_s^t \delta_v\, dv\} \|G_s\|^2\, ds\,. \tag{2.10.3}$$

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2.10.1 ([41][18]) *Пусть выполнено предположение 2.10.1. Тогда верхняя функция h_t для процесса $\bar{Z}_t = \|Z_t\|^2$ имеет вид*

а)

$$h_t = d_t \ln \left(\int\limits_0^t \delta_v \, dv \right) , \tag{2.10.4}$$

если функция $d_t \exp\{2\gamma \int\limits_0^t \delta_v \, dv\} \to \infty,\ t \to \infty$;

б)

$$h_t = \exp\{-2\tilde{\alpha}\gamma \int\limits_0^t \delta_v \, dv\} , \tag{2.10.5}$$

если функция $d_t \exp\{2\gamma \int\limits_0^t \delta_v \, dv\}$ *– ограничена. При этом константы* $0 < \tilde{\alpha} < 1$, $0 < \gamma < 1/2$, *функция* d_t *задается равенством* (2.10.3).

Следствием утверждения теоремы 2.10.1 является тот факт, что для любой верхней функции h_t имеет место соотношение $c_2 h_t^{(1)} \le h_t \le c_1 h_t^{(0)}$ с некоторыми константами $c_1, c_2 > 0$, где $h_t^{(0)} = \ln(\int\limits_0^t \delta_v \, dv)$, $h_t^{(1)} = \exp\{-\beta \int\limits_0^t \delta_v \, dv\}$ при некоторой константе $0 < \beta < 1$.

2.10.2 Случай коррелированных аддитивных и мультипликативных возмущений

В данном разделе рассматривается общая ситуация скалярного линейного СДУ, когда на динамику системы помимо аддитивных влияют мультипликативные возмущения, а также внешние воздействия в форме случайного процесса, см. [88]. Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ задан скалярный процесс Z_t, $t \ge 0$, являющийся решением линейного СДУ вида

$$dZ_t = a_t Z_t dt + \tilde{f}_t dt + G_t dW_t + \sigma_t Z_t dw_t, \tag{2.10.6}$$

с неслучайным начальным условием $Z_0 = z$; a_t, G_t, σ_t – кусочно-непрерывные детерминированные функции времени; $\tilde{f}_t$, $t \ge 0$, – $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс со свойством $E\int\limits_0^t \tilde{f}_s^2 \, ds < \infty$, $t \ge 0$; W_t, w_t, $t \ge 0$ – коррелированные одномерные $\mathcal{F}_t$-согласованные винеровские процессы, т.е. $dW_t dw_t = \rho dt$, где ρ – константа, такая что $-1 \le \rho \le 1$.

Уравнение (2.10.6) - уравнение с переменными коэффициентами, предположения о которых формулируются ниже, здесь отметим, что допускаются как ситуации неограниченности, так и сингулярности параметров при $t \to \infty$. Уравнения такого вида широко

[18] См. Theorem 1 в *Palamarchuk E.S.* On the generalization of logarithmic upper function for solution of a linear stochastic differential equation with a nonexponentially stable matrix // Differential Equations. 2018. Vol. 54. No. 2. P. 193–200.

применяются при моделировании в различных областях приложений, см. [43], [44] и ссылки в работах [88] и [91]. Ниже формулируются основные предположения относительно коэффициентов (2.10.6).

Предположение 2.10.2 ([88]) *Существует монотонная детерминированная функция* δ_t, $\delta_t > 0$, $t \ge 0$, *такая что*

а) $\int\limits_0^t \delta_v\, dv \to \infty$, $t \to \infty$, $\limsup\limits_{t\to\infty}\{(G_t^2 + \sigma_t^2)/\delta_t\} < \infty$

и при этом для функции $\bar{\Phi}(t,s) = \exp\left(\int\limits_s^t a_v\, dv\right)$ *выполняются неравенства*

б)

$$\kappa_2 \exp\left(-2\bar{\kappa}\int\limits_s^t \delta_v\, dv\right) \le \bar{\Phi}^2(t,s) \le \kappa_1 \exp\left(-2\int\limits_s^t \delta_v\, dv\right), \quad s \le t\,, \tag{2.10.7}$$

в)

$$\bar{\Phi}^2(t,s) \exp\left(\int\limits_s^t \sigma_v^2\, dv\right) \le \kappa_3 \exp\left(-2\kappa\int\limits_s^t \delta_v\, dv\right), \quad s \le t, \tag{2.10.8}$$

при некоторых константах κ_i, $\kappa_i > 0$ *(*$i = 1,2,3$*),* $\bar{\kappa}$ *и* κ, *таких что* $\bar{\kappa} \ge 1$, $0 < \kappa \le 1$.

Условия в п.а) и п.б) имеют смысл, аналогичный условиям из ранее введенного определения 2.10.1. Если $\tilde{f}_t \equiv 0$, то наличие (2.10.8) и п.а) обеспечивают ограниченность $EZ_t^2, t \ge 0$. Очевидно, что одним из важных вопросов при изучении (2.10.6) становится исследование его решений при возрастании параметра времени, в частности, интересует возможность стремления Z_t к нулю. Как и в разделе 2.10.1, такой анализ проводится при помощи построения верхних оценок в том или ином вероятностном смысле, как функций от параметров (2.10.6). Точнее, ставится задача поиска неотрицательных функций h_t и $\bar{h}_t$, $t \ge 0$, таких что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{EZ_t^2}{\bar{h}_t} < \infty\,,$$

и

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{Z_t^2}{h_t} < \infty\,, \quad \text{с вероятностью 1.} \tag{2.10.9}$$

Тогда, если известен вид h_t и $\bar{h}_t$, то можно выявить условия на коэффициенты, при которых $EZ_t^2 \to 0$, т.е. возникает сходимость в среднем квадратичном, или же с вероятностью 1 справедливо соотношение $Z_t^2 \to 0$, означающее стремление процесса к нулевому состоянию почти наверное (п.н.) при $t \to \infty$. Ранее задача поиска h_t и $\bar{h}_t$ исследовалась для частных случаев (2.10.6), см. [41], [55, Section 4.2, p. 117]–[57], [91]. Вначале приведем результат о виде мажорирующей функции $\bar{h}_t$, $t \ge 0$, для оценивания процесса в среднем квадратичном.

Лемма 2.10.1 ([88][19]) *Пусть выполнено предположение* 2.10.2.

Тогда $\limsup_{t\to\infty}\{EZ_t^2/\bar{h}_t\} < \infty$, *где функция* $\bar{h}_t$ *задается в виде*

$$\bar{h}_t = \exp\{-2\kappa(1-\lambda)\int\limits_0^t \delta_v\,dv\}z^2 + \int\limits_0^t \exp\{-2\kappa(1-\lambda)\int\limits_s^t \delta_v\,dv\}\left(G_s^2 + \frac{E\tilde{f}_s^2}{\delta_s}\right)ds, \tag{2.10.10}$$

для любой константы λ, *такой что* $0<\lambda<1$, *при этом постоянная* κ, $0<\kappa\le 1$, *взята из условия* (2.10.8).

Возникновение константы λ, уменьшающей показатель функции в (2.10.10), вызвано наличием ненулевой корреляции $\rho \neq 0$ между винеровскими процессами, задающими аддитивными и мультипликативные возмущения в (2.10.6), а также включением внешних воздействий $\tilde{f}_t$ в динамику (2.10.6).

Далее вводится ряд обозначений. Пусть ϵ – действительное число. Положим

$$\mathcal{N}_t(\epsilon) = \int\limits_0^t \exp\{2\bar{\kappa}\int\limits_0^s \delta_v\,dv + (1+\epsilon)\int\limits_0^s \sigma_v^2\,dv\}G_s^2\,ds, \tag{2.10.11}$$

где $\bar{\kappa}\ge 1$ – константа из условия (2.10.7).

Также определим величину $\alpha>0$ следующим образом:

$$\alpha = \frac{2}{1+(1-\kappa/\bar{\kappa})^{-1}} + \beta, \tag{2.10.12}$$

где $\beta>0$ – сколь угодно малое число, константы $\bar{\kappa}$ и κ взяты из (2.10.7) и (2.10.8) предположения 2.10.2. Тогда будет справедлив следующий результат.

Теорема 2.10.2 ([88][20]) *Пусть выполнено предположение* 2.10.2.

Тогда $\limsup_{t\to\infty}\{Z_t^2/h_t\} < \infty$, *п.н. для функции* h_t, *задаваемой в виде*

$$h_t = h_t^{(0)} + \int\limits_0^t \exp\{-2(1-\lambda_2)\int\limits_s^t \delta_v\,dv\}\left(G_s^2 + \frac{\tilde{f}_s^2}{\delta_s}\right)ds\left(\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\right)^{\alpha}, \tag{2.10.13}$$

где функция $h_t^{(0)}$ *определяется как* $h_t^{(0)} = \exp\{-2\int\limits_0^t \delta_v\,dv - 2(1-\lambda_0)\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\}z^2 +$
$+\int\limits_0^t \exp\{-2(1-\lambda_1)\int\limits_0^t \delta_v\,dv\}G_s^2\,ds\left(\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\right)^{\alpha}\ln\left(\int\limits_0^t \delta_v\,dv\right)$, *если при любом* $\epsilon>0$ *выпол-*

[19] См. Lemma 2 в *Palamarchuk E.S.* On asymptotic behavior of solutions of linear inhomogeneous stochastic differential equations with correlated inputs // Differential Equations. 2022. Vol. 58. No. 10. P. 1291–1308.

[20] См. Theorem 1 в *Palamarchuk E.S.* On asymptotic behavior of solutions of linear inhomogeneous stochastic differential equations with correlated inputs // Differential Equations. 2022. Vol. 58. No. 10. P. 1291–1308.

няется $\mathcal{N}_t(\epsilon) \to \infty,\ t \to \infty,$ *и* $h_t^{(0)} = \exp\{-2\int\limits_0^t \delta_v\,dv - 2(1-\lambda_0)\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv\}(1+z^2),$ *если для некоторого* $\epsilon > 0$ *функция* $\mathcal{N}_\infty(\epsilon) < \infty$ *.*

При этом функция $\mathcal{N}_t(\epsilon)$ *задается в* (2.10.11)*,* λ_i *– произвольные константы, такие что* $0 < \lambda_i < 1,\ i = 0, 1, 2$*. Для случая* $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\} > 0$ *величина* α *определена в* (2.10.12)*, и* $\alpha > 0$ *– сколь угодно малое число при* $\limsup\limits_{t\to\infty}\{\sigma_t^2/\delta_t\} = 0$*. Кроме того, в случае* $\int\limits_0^\infty \sigma_t^2\,dt < \infty$ *можно положить* $\lambda_1 = 0$*.*

Сравнивая, приведенный в теореме 2.10.2 результат с оценкой [41] и функцией из раздела 2.10.1, полученной для ситуации только аддитивных возмущений, можно заметить следующее. Новые факторы, включенные в динамику (2.10.6), нашли свое отражение в виде соответствующей оценки (2.10.13). Наличие мультипликативных шумов увеличивает верхнюю границу пропорционально $(\int\limits_0^t \sigma_v^2\,dv)^\alpha$, наряду с предположением о корреляции $\rho \neq 0$ и случайных внешних воздействиях $\tilde{f}_t$, откуда также следует и результат работы [57].

2.11 Аналитическое моделирование аномальных диффузий

В данном разделе исследуются вопросы применения скалярных линейных СДУ (2.10.1) и (2.10.6) для моделирования процессов, известных как аномальные диффузии. Аномальная диффузия означает, что среднеквадратичное перемещение, соответствующее процессу скорости, задаваемому при помощи (2.10.1) или (2.10.6), имеет нелинейное изменение во времени (степенное, логарифмическое и т.д.). Линейный рост соответствует перемещению, задаваемому броуновским движением, так называемая «нормальная» диффузия. Подробно различные аспекты моделирования и обзор литературы приведен в [42], здесь же мы акцентируем внимание на описании основных результатов. Стоит отметить, что будет реализован как известный подход на базе среднеквадратичных перемещений, см. [42], [88], так и новая вероятностная постановка, см. [92], с привлечением понятия верхних функций для характеризации аномальных диффузий при их сравнении с верхней функцией из закона повторного логарифма [90].

2.11.1 Моделирование при помощи процесса Орнштейна-Уленбека с переменными коэффициентами

Введем в рассмотрение модель процесса, используемого в дальнейшем для аналитического задания аномальных диффузий. Предположим, что скалярный случайный процесс $Z_t,\ t \geq 0,$ – процесс Орнштейна–Уленбека с переменными коэффициентами, описывается неавтономным линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$dZ_t = a_t Z_t dt + \sigma_t dW_t\,, \qquad Z_0 = z, \tag{2.11.1}$$

где начальное состояние z неслучайно; W_t, $t \geq 0$, – стандартный винеровский процесс; a_t, σ_t, $t \geq 0$, – кусочно-непрерывные функции времени.

Предполагается, что функция a_t, $t \geq 0$, гарантирует устойчивость с темпом δ_t для решения соответствующего детерминированного уравнения, см. п. (i)–(iii) определения 2.10.1. Из п. (i) также следует, что $\Phi(t,s) \geq \kappa_0 \exp\{-\int\limits_s^t \bar{\kappa}\delta_v\, dv\}$, $s \leq t$, при некоторых константах $\kappa_0, \bar{\kappa} > 0$. Полагая начальное положение нулевым, зададим процесс перемещения

$$Y_T = \int\limits_0^T Z_t\, dt\,, \quad T \geq 0\,, \tag{2.11.2}$$

и определим среднеквадратичное перемещение

$$D_T = E\left(\int\limits_0^T Z_t\, dt\right)^2 . \tag{2.11.3}$$

Далее формула (2.11.3) преобразуется, см. [42], к виду

$$D_T = 2\int\limits_0^T \int\limits_0^t \Phi(t,s) E Z_s^2\, ds\, dt\,, \tag{2.11.4}$$

где

$$E Z_t^2 = \Phi^2(t,0) z^2 + \int\limits_0^t \Phi^2(t,s)\sigma_s^2\, ds\,. \tag{2.11.5}$$

Далее будет использоваться обозначение $\sim$, вводимое в следующем определении.

Определение 2.11.1 ([42]) *Запись $f_t \sim g_t$ означает, что для двух скалярных неотрицательных функций f_t, g_t выполняется соотношение $0 < \lim\limits_{t\to\infty}(f_t/g_t) < \infty$.*

Интерес представляет поведение D_T при $T \to \infty$, поэтому если для некоторой неубывающей функции $\tilde{D}_T > 0$ имеет место соотношение $\tilde{D}_T \sim D_T$ (см. определение 2.11.1), то эта функция $\tilde{D}_T$ также будет характеризовать порядок изменения среднеквадратичного перемещения D_T. Также, см. [42], среднеквадратичное перемещение D_T можно оценить в виде

$$\kappa_0^3 D_T^{(1)} \leq D_T \leq \kappa^3 D_T^{(2)}\,, \tag{2.11.6}$$

где $D_T^{(1)}$ и $D_T^{(2)}$ – среднеквадратичные перемещения, определяемые на основе (2.11.1) в случаях $a_t = -\bar{\kappa}\delta_t$ и $a_t = -\delta_t$, $\kappa_0, \kappa, \bar{\kappa} > 0$ – соответствующие константы, также см.

(ii) определения 2.10.1. Для этих ситуаций также введем отдельные обозначения для функций второго момента (см. (2.11.5)):

$$m_t^{(1)} = \exp\{-2\int_0^t \bar{\kappa}\delta_v\,dv\}z^2 + \int_0^t \exp\{-2\int_s^t \bar{\kappa}\delta_v\,dv\}\sigma_s^2\,ds\,, \tag{2.11.7}$$

$$m_t^{(2)} = \exp\{-2\int_0^t \delta_v\,dv\}z^2 + \int_0^t \exp\{-2\int_s^t \delta_v\,dv\}\sigma_s^2\,ds\,. \tag{2.11.8}$$

Далее формулируется определение аномальной диффузии.

Определение 2.11.2 ([42]) *Пусть* $d_1 = \liminf\limits_{t\to\infty}(D_T/T)$ *и* $d_2 = \limsup\limits_{t\to\infty}(D_T/T)$. *Если* $0 < d_1 \le d_2 < \infty$, *то диффузия называется нормальной, в противном случае – аномальной: при* $d_2 = 0$ *– субдиффузией; при* $d_1 = \infty$ *– супердиффузией.*

В следующем утверждении приводятся условия, позволяющие классифицировать диффузии (2.11.1) в зависимости от характеристик процессов, задающих среднеквадратичные перемещения $D_T^{(1)}$ и $D_T^{(2)}$.

Теорема 2.11.1 ([42][21]) *Пусть* $d^{(1)} = \liminf\limits_{t\to\infty}(m_t^{(1)}/\delta_t)$ *и* $d^{(2)} = \limsup\limits_{t\to\infty}(m_t^{(2)}/\delta_t)$, *где* $m_t^{(1)}$ *и* $m_t^{(2)}$ *определяются в* (2.11.7) *и* (2.11.8). *Тогда имеют место следующие типы диффузий:*

1) *при* $0 < d^{(1)} \le d^{(2)} < \infty$ *– нормальная диффузия;*
2) *при* $d^{(2)} = 0$ *– субдиффузия;*
3) *при* $d^{(1)} = \infty$ *– супердиффузия.*

Рассмотрим обратную задачу. Предположим, что известна функция D_T, $T \ge 0$, и возникает проблема нахождения $a_t = -\delta_t$ и σ_t для уравнения (2.11.1), при которых для соответствующего $\tilde{D}_T$ выполняется $\tilde{D}_T \sim D_T$. Оказывается, эта задача всегда имеет решение при естественном условии монотонного возрастания функции среднеквадратичного перемещения. Введем предварительные обозначения $\dot{D}_t$, $\ddot{D}_t$, $\dddot{D}_t$ для первой, второй и третьей производной функции D_t соответственно.

Теорема 2.11.2 ([42][22]) *Пусть* D_t *– трижды дифференцируемая функция и* $\dot{D}_t > 0$, $t \ge 0$. *Тогда существует пара функций* (δ_t, σ_t^2), *где* $\delta_t > 0$ *– задает темп устойчиво-*

[21] См. Theorem 1 в *Palamarchuk E.S.* An analytic study of the Ornstein–Uhlenbeck process with time-varying coefficients in the modeling of anomalous diffusions // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 2. P. 289–299.

[22] См. Theorem 2 в *Palamarchuk E.S.* An analytic study of the Ornstein–Uhlenbeck process with time-varying coefficients in the modeling of anomalous diffusions // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 2. P. 289–299.

сти, а $\sigma_t^2 > 0$, *связанных соотношением*

$$\dot{\delta}_t + \frac{3\ddot{D}_t}{\dot{D}_t}\delta_t + 2\delta_t^2 + \frac{\dddot{D}_t}{\dot{D}_t} = \frac{2\sigma_t^2}{\dot{D}_t}\,, \quad \delta_0 = \bar{\delta}\,, \tag{2.11.9}$$

($\bar{\delta} > 0$ – *произвольное начальное условие*), *такая что для среднеквадратичного перемещения*

$$\tilde{D}_T = 2\int\limits_0^T \exp\{-\int\limits_0^t \delta_v\,dv\} \int\limits_0^t \exp\{\int\limits_0^s \delta_v\,dv\} m_s^{(2)}\,ds\,dt\,, \tag{2.11.10}$$

имеет место соотношение $\tilde{D}_T \sim D_T$. *При этом функция* $m_t^{(2)}$ *в* (2.11.10) *определяется по* (2.11.8) *с* $z = 0$.

2.11.2 Верхние функции для аномальных диффузий, моделируемых процессом Орнштейна-Уленбека

В данном разделе представлены результаты по анализу типов диффузий на основе сравнения верхних функций для процессов перемещений, см. [92] и определение 2.10.2. Полагаем, что в уравнении (2.11.1) $a_t = -\delta_t$ и $z = 0$. Сделаем предположение о характере изменения функции темпа устойчивости δ_t.

Предположение 2.11.1 ([92]) *Темп устойчивости* δ_t *является монотонной дифференцируемой функцией,* $t \ge 0$, *и для функции* $\phi_t = \dot{\delta}_t/\delta_t^2$ *выполняется по меньшей мере одно из двух соотношений:*

$$\lim_{t\to\infty} \phi_t = \hat{\kappa}\,, \qquad \lim_{t\to\infty} (1/\phi_t) = \tilde{\kappa}\,, \quad \text{где } \hat{\kappa}, \tilde{\kappa} \text{ – неположительные константы} \tag{2.11.11}$$

и при этом, если в (2.11.11) $\hat{\kappa} = \tilde{\kappa} = -1$, *то* $|\int\limits_0^\infty (\frac{1}{t+1} - \delta_t)\,dt| < \infty$.

Отметим, что случаи $\hat{\kappa}, \tilde{\kappa} > 0$ не рассматриваются в силу того, что влекут за собой $\delta_t < 0$, $t \ge 0$, т.е. неустойчивый коэффициент в уравнении динамики процесса, очевидно, не удовлетворяющий ранее сделанным предположениям относительно функции δ_t, см. (2.11.1).

Вид верхних функций получается посредством прямого интегрирования процесса скорости. Введем в рассмотрение функцию B_t:

$$B_t = -\int\limits_t^\infty \exp\{-\textstyle\int_0^s \delta_v\,dv\}\,ds\,, \quad \text{если } \int\limits_0^\infty \exp\{-\textstyle\int_0^t \delta_v\,dv\}\,dt < \infty \tag{2.11.12}$$

и

$$B_t = \int\limits_0^t \exp\{-\textstyle\int_0^s \delta_v\,dv\}\,ds\,, \quad \text{если } \int\limits_0^t \exp\{-\textstyle\int_0^s \delta_v\,dv\}\,ds \to \infty\,,\ t \to \infty\,. \tag{2.11.13}$$

Далее через g_T будем обозначать любую монотонную функцию со следующими свойствами:

$$g_T > 0,\ T \geq 0, \quad g_T \to \infty,\ T \to \infty\,. \tag{2.11.14}$$

Тогда будет справедлив следующий результат.

Теорема 2.11.3 ([92][23]) *Пусть*

$$M_T^{(1)} = \int\limits_0^T \exp\{2\int_0^t \delta_v\, dv\}\sigma_t^2\, dt\,, \quad M_T^{(2)} = \int\limits_0^T B_t^2 \exp\{2\int_0^t \delta_v\, dv\}\sigma_t^2\, dt\,, \tag{2.11.15}$$

где функция B_t определена в (2.11.12)–(2.11.13). Тогда верхняя функция h_T процесса $\bar{Z}_T = |Y_T|$ имеет следующий вид:

1) *если* $M_\infty^{(1)} < \infty\,, \quad M_\infty^{(2)} < \infty\,,$ *то*

а) $Y_T \to Y_\infty = -\int\limits_0^\infty B_t \exp\{\int_0^t \delta_v\, dv\}\sigma_t\, dW_t$ *п.н. при* $T \to \infty$ *для* $\int\limits_0^\infty \exp\{-\int_0^t \delta_v\, dv\}\, dt < \infty;$

б) $h_T \sim g_T|B_T|\,,$ *при* $\int\limits_0^t \exp\{-\int_0^s \delta_v\, dv\}\, ds \to \infty\,,\ t \to \infty;$

2) *если* $M_\infty^{(1)} < \infty\,, \quad M_T^{(2)} \to \infty\,,\ T \to \infty\,,$ *то* $h_T \sim |B_T|\sqrt{\ln\ln|B_T|}\,;$

3) *если* $M_T^{(1)} \to \infty\,,\ T \to \infty\,, \quad M_\infty^{(2)} < \infty\,,$ *то* $h_T \sim |B_T|\sqrt{M_T^{(1)} \ln\ln M_T^{(1)}} + g_T;$

4) *если* $M_T^{(1)} \to \infty\,, \quad M_T^{(2)} \to \infty\,,\ T \to \infty\,,$ *то*

$$h_T \sim |B_T|\sqrt{M_T^{(1)} \ln\ln M_T^{(1)}} + \sqrt{M_T^{(2)} \ln\ln M_T^{(2)}}\,,$$

при этом функция g_T задана в (2.11.14).

Также в [92] был исследован вопрос о соответствии видов диффузий, определяемых на основе среднеквадратичного перемещения (см. определение 2.11.2), и при помощи верхних функций. Распространение подхода по выявлению типа диффузии посредством сравнения ее характеристик с известными свойствами нормальной диффузии, в рассматриваемом случае – верхней функцией $h_T \sim \sqrt{T \ln\ln T}$, приводит к формулировке следующего определения.

Определение 2.11.3 ([92]) *Предположим, что известна h_T – верхняя функция процесса перемещения Y_T (см. теорему 2.11.3). Пусть величины $\bar{d}_1 = \liminf\limits_{t\to\infty} (h_T/\sqrt{T \ln\ln T})$ и $\bar{d}_2 = \limsup\limits_{t\to\infty} (h_T/\sqrt{T \ln\ln T})$. Если $0 < \bar{d}_1 \leq \bar{d}_2 < \infty$, то диффузия называется нормальной с точки зрения верхней функции, в противном случае – аномальной: при $\bar{d}_2 = 0$ – субдиффузией; при $\bar{d}_1 = \infty$ – супердиффузией.*

[23] См. Lemma 3 в *Palamarchuk E.S.* On upper functions for anomalous diffusions governed by time-varying Ornstein–Uhlenbeck process // Theory of Probability & Its Applications. 2019. Vol. 64. No. 2. P. 209–228.

Как отмечалось выше, в случае $Y_T \to Y_\infty$, $T \to \infty$, где Y_∞ – с.в., верхней функцией h_T может быть выбрана любая положительная неограниченно возрастающая функция $h_T \sim g_T$, см. (2.11.14), и тогда согласно определению 2.11.3 будет иметь место субдиффузия. Сначала приведем результат о классификации диффузий на основе среднеквадратичных перемещений.

Следствие 1 ([92]) *Пусть* $d_1^* = \liminf\limits_{t\to\infty} (EZ_t^2/\delta_t)$ *и* $d_2^* = \limsup\limits_{t\to\infty} (EZ_t^2/\delta_t)$, *где* EZ_t^2 *определяется в* (2.11.5). *Тогда имеют место следующие типы диффузий:*

1) *при* $0 < d_1^* \le d_2^* < \infty$ *– нормальная диффузия;*

2) *при* $d_2^* = 0$ *– субдиффузия;*

3) *при* $d_1^* = \infty$ *– супердиффузия.*

Получен следующий результат.

Теорема 2.11.4 ([92][24]) *Пусть предположение* 2.11.1 *выполнено с константой* $\hat{\kappa} \ne -1, -2$, *а при* $\hat{\kappa} = 0$ *имеет место* $\liminf\limits_{t\to\infty} (\dot{\delta}_t t/\delta_t) \ge 0$. *Тогда виды диффузий, выявляемые на основе динамики среднеквадратичного перемещения и верхних функций, совпадают и определяются в соответствии с п.* 1)–3) *следствия* 1*:*

1) *при* $0 < d_1^* \le d_2^* < \infty$ *– нормальная диффузия;*

2) *при* $d_2^* = 0$ *– субдиффузия;*

3) *при* $d_1^* = \infty$ *– супердиффузия.*

Случаи $\hat{\kappa} = -1$ и $\hat{\kappa} = -2$ рассмотрены в [92] отдельно. По результатам анализа выявлено расхождение с типами диффузий, определяемыми на основе среднеквадратичных перемещений, что связано с использованием характеристики на основе квадратических вариаций, см. теорему 2.11.3, с более быстрым или, наоборот, замедленным ростом во времени.

2.11.3 Моделирование аномальных субдиффузий при помощи линейных стохастических дифференциальных уравнений общего вида

Предположим, что уравнение (2.10.6) задает процесс скорости, тогда процесс перемещения и среднеквадратичное перемещение определяются по (2.11.2) и (2.11.3) соответственно. Согласно определению 2.11.2, субдиффузия возникает при $D_T/T \to 0$, $T \to \infty$. Если же выявлять тип диффузии на основе сравнения верхних функций, см. [92] и определение 2.11.3, то субдиффузия имеет место для $\limsup\limits_{T\to\infty}\{|Y_T|/\sqrt{T \ln\ln T}\} = 0$. На основе результатов леммы 2.10.1 и теоремы 2.10.2 формулируется следующее утверждение.

[24] См. Theorem 5 в *Palamarchuk E.S.* On upper functions for anomalous diffusions governed by time-varying Ornstein–Uhlenbeck process // Theory of Probability & Its Applications. 2019. Vol. 64. No. 2. P. 209–228.

Лемма 2.11.1 ([88][25]) *Пусть выполнено предположение* 2.10.2. *Тогда*

а) *если для функции* $\bar{h}_t$ *из* (2.10.10) *выполняется* $\bar{h}_t t \to 0,\ t \to \infty$, *то процесс* Z_t *задает субдиффузию в среднем квадратичном;*

б) *если для функции* h_t *из* (2.10.13) *выполняется* $\{h_t(t/\ln\ln t)\} \to 0,\ t \to \infty$, *то процесс* Z_t *описывает субдиффузию по отношению к верхней функции.*

Для дальнейшего анализа потребуется привлечь введенное ранее предположение 2.11.1 о характере изменения функции $\delta_t,\ t \to \infty$, определяющей темп устойчивости в (2.10.6). Применяется подход, основанный на изучении нормированных процессов с помощью утверждений по типу лемм из работы [65]. При этом нормирующие функции имеют порядок T (для субдиффузии в среднем квадратичном) или же $\sqrt{T \ln\ln T}$ (субдиффузия по верхним функциям).

Теорема 2.11.5 ([88][26]) *Пусть выполнены предположения* 2.10.2 *и* 2.11.1 *с* $\hat{\kappa} > -2$. *Тогда, если для функции* $\bar{h}_t$, *определенной в* (2.10.10), *и коэффициентов* (2.10.6) *выполняется:*

а)

$$\frac{G_t^2 + \sigma_t^2 \bar{h}_t + tE\tilde{f}_t^2}{\delta_t^2} \to 0, \quad t \to \infty\,,$$

то процесс Z_t *задает субдиффузию в среднем квадратичном;*

б) *функция*

$$\frac{G_t^2 + \sigma_t^2 \bar{h}_t}{\delta_t^2}\sqrt{\frac{t}{\ln\ln t}}$$

– ограничена при $t \to \infty$, *а также имеет место одно из двух условий:*

$$\frac{|\tilde{f}_t|}{\delta_t}\sqrt{\frac{t}{\ln\ln t}} \to 0, \quad \text{п.н.}, t \to \infty\,,$$

или же ограничено выражение

$$t\frac{E\tilde{f}_t^2}{\delta_t^2}\sqrt{\frac{t}{\ln\ln t}}\,, \quad t \to \infty\,,$$

то процесс Z_t *задает субдиффузию по отношению к верхней функции.*

Также в [88] было замечено, что в случае $\hat{\kappa}/\bar{\kappa} \le -2,\ \hat{\kappa}$ и $\bar{\kappa}$ – константы из предположения 2.11.1 и неравенства (2.10.7), соответственно, даже в самой простой ситуации детерминированного уравнения (2.10.6) с нетривиальным начальным условием $z \neq 0$, будет выполняться $\liminf\limits_{T\to\infty}\{D_T/T\} > 0$, т.е. отсутствовать субдиффузия.

[25] См. Assertion в *Palamarchuk E.S.* On asymptotic behavior of solutions of linear inhomogeneous stochastic differential equations with correlated inputs // Differential Equations. 2022. Vol. 58. No. 10. P. 1291–1308.

[26] См. Theorem 2 в *Palamarchuk E.S.* On asymptotic behavior of solutions of linear inhomogeneous stochastic differential equations with correlated inputs // Differential Equations. 2022. Vol. 58. No. 10. P. 1291–1308.

3 Основные выводы

1. Проведено исследование линейных стохастических систем с переменными коэффициентами при стремлении параметра времени к бесконечности.
2. Для систем с возможностью управляющих воздействий был проведен анализ задач оптимального управления на бесконечном интервале времени.
3. При изучении проблемы оптимальности использована методология на основе определения так называемого оптимального установившегося закона управления как предельной формы в решениях задач с конечным горизонтом планирования.
4. Построены критерии оптимальности, обобщающие критерии долговременных средних и учитывающие в своей структуре влияние переменных коэффициентов системы управления.
5. Введены нормировки критериев в виде скорректированных дисперсий интегральных шумовых воздействий. Вклад возмущений отражен в виде квадрата нормы матрицы диффузии, а корректирующий множитель связан со спецификой коэффициентов детерминированной части.
6. При использовании построенных неэргодических критериев выявлены условия оптимальности установившейся стратегии управления для различных классов линейных стохастических систем.
7. Установлено, что при применении потраекторных критериев (т.е. оптимизации почти наверное) требуется неограниченное возрастание соответствующих нормировок.
8. Для линейных СДУ, связанных с оптимальными процессами, найдены явные выражения для верхних оценок, с вероятностью 1 мажорирующих траектории и зависящих от коэффициентов уравнений.
9. Проведено обобщение построенных оценок для скалярного случая при добавлении мультипликативных шумов в динамику.
10. Рассмотренные типы линейных СДУ были использованы при аналитическом моделировании аномальных диффузий.
11. Сформулировано определение аномальной диффузии на основе явного выражения для среднеквадратичного перемещения.
12. Выявлено, что обратная задача по определению коэффициентов уравнения процесса для воспроизведения заданного среднеквадратичного перемещения также имеет решение, связанное с уравнением Риккати.
13. Представлен вероятностный подход, при котором происходит сравнение потраекторных оценок процесса перемещения в виде верхних функций и выявляются типы диффузий.

Список литературы

[1] *Lang N.* Numerical methods for large-scale linear time-varying control systems and related differential matrix equations. Berlin: Logos Verlag Berlin GmbH, 2018.

[2] *Komorowski M., Finkenstadt B., Harper C.V., Rand D.A.* Bayesian inference of biochemical kinetic parameters using the linear noise approximation // BMC bioinformatics. 2009. Vol. 10. P. 1–10.

[3] *Szavits-Nossan J.J., Eden K., Morris R.J., MacPhee C.E., Evans M.R., Allen R.J.* Inherent variability in the kinetics of autocatalytic protein self-assembly // Physical Review Letters. 2014. Vol. 113. No. 9. P. 098101.

[4] *Monahan A. H., Culina J.* Stochastic averaging of idealized climate models // Journal of climate. 2011. Vol. 24. No. 12. P. 3068–3088.

[5] *Ispany M., Pap G., Zuijlen M.* Critical branching mechanisms with immigration and Ornstein–Uhlenbeck type diffusions // Acta Sci. Math.(Szeged). 2005. Vol. 71. P. 821–850.

[6] *McNeil D.R.* Diffusion limits for congestion models // Journal of Applied Probability. 1973. Vol. 10. No. 2. P. 368–376.

[7] *Jabari S.E., Liu H.X.* A stochastic model of traffic flow: Gaussian approximation and estimation // Transportation Research Part B: Methodological. 2013. Vol. 47. P. 15–41.

[8] *Lansky P.* On approximations of Stein's neuronal model // Journal of theoretical biology. 1984. Vol. 107. No. 4. P. 631–647.

[9] *Huang J., Wang G., Wu Z.* Optimal premium policy of an insurance firm: full and partial information // Insurance: Mathematics and Economics. 2010. Vol. 47. No. 2. P. 208–215.

[10] *Safdari H., Cherstvy A.G., Chechkin A.V., Bodrova A., Metzler R.* Aging underdamped scaled Brownian Motion: Ensemble-and time-averaged particle displacements, nonergodicity, and the failure of the overdamping approximation // Physical Review E. 2017. Vol. 95. No. 1. P. 012120.

[11] *Smith P.L., McKenzie C.R.L.* Diffusive information accumulation by minimal recurrent neural models of decision making // Neural computation. 2011. Vol. 23. No. 8. P. 2000–2031.

[12] *Smith P.L., Ratcliff R., Sewell D.K.* Modeling perceptual discrimination in dynamic noise: Time-changed diffusion and release from inhibition // Journal of Mathematical Psychology. 2014. Vol. 59. P. 95–113.

[13] *Hull J., White A.* Pricing interest-rate-derivative securities // The review of financial studies. 1990. Vol. 3. No. 4. P. 573–592.

[14] *Jeon J.H., Chechkin A.V., Metzler R.* Scaled Brownian motion: a Paradoxical process with a time dependent diffusivity for the description of anomalous diffusion // Physical Chemistry Chemical Physics. 2014. Vol. 16. No. 30. P. 15811–15817.

[15] *Lim S.C., Muniandy S.V.* Self-Similar Gaussian processes for modeling anomalous diffusion // Physical Review E. 2002. Vol. 66. No. 2. P. 021114.

[16] *Cherstvy A.G., Safdari H., Metzler R.* Anomalous diffusion, nonergodicity, and ageing for exponentially and logarithmically time-dependent diffusivity: striking differences for massive versus massless particles // Journal of Physics D: Applied Physics. 2021. Vol. 54. No. 19. P. 195401.

[17] *Jiang H., Gray H.L., Woodward W.A.* Time-frequency analysis-G (λ)-stationary processes // Computational Statistics & Data Analysis. 2006. Vol. 51. No. 3. P. 1997–2028.

[18] *Vijverberg C.P.C.* Time deformation, continuous Euler processes and forecasting // Journal of Time Series Analysis. 2006. Vol. 27. No 6. P. 811–829.

[19] *Kwasniok F.* Predicting critical transitions in dynamical systems from time series using nonstationary probability density modeling // Physical Review E. 2013. Vol. 88. No. 5. P. 052917.

[20] *Smith P.L., Ratcliff R.* Modeling evidence accumulation decision processes using integral equations: Urgency-gating and collapsing boundaries // Psychological review. 2022. Vol. 129. No. 2. P. 235.

[21] *Baldi P.* Limit set of inhomogeneous Ornstein-Uhlenbeck processes, destabilization and annealing // Stochastic processes and their applications. 1986. Vol. 23. No. 1. P. 153–167.

[22] *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977.

[23] *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal control: linear quadratic methods. MA: Courier Corporation, 2007.

[24] *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. 3-е изд. М.: Высшая школа. 2003.

[25] *Frederick S., Loewenstein G., O'donoghue T.* Time discounting and time preference: A critical review // Journal of economic literature. 2002. Vol. 40. No. 2. P. 351–401.

[26] *Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.* Infinite horizon optimal control: deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 2012.

[27] *Borkar V.S., Arapostathis A., Ghosh M.K.* Ergodic Control of Diffusion Processes. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 2012.

[28] *Паламарчук Е.С.* Оценка риска в линейных экономических системах при отрицательных временных предпочтениях // Экономика и математические методы. 2013. Т. 49. № 3. С. 99–116.

[29] *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Linear system optimisation with prescribed degree of stability // Proceedings of the Institution of Electrical Engineers. 1969. Vol. 116. No. 12. P. 2083–2087.

[30] *Rao K.A.G., Rao K.V., Rao V.P., Sastry L.B.K.* An approach to the design of optimal linear regulators with time weighted quadratic performance criteria // IETE Journal of Research. 1982. Vol. 28. No. 10. P. 539–542.

[31] *Bonkas E.K., Liu Z.K.* Suboptimal design of regulators for jump linear system with time-multiplied quadratic cost // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. Vol. 46. No. 1. P. 131–136.

[32] *Kohlmann M., Tang S.* Multidimensional backward stochastic Riccati equations and applications // SIAM Journal on Control and Optimization. 2003. Vol. 41. No. 6. P. 1696–1721.

[33] *Дэвис М.Х.А.* Линейное оценивание и стохастическое управление. М.: Наука, 1984.

[34] *Wu M.-Y., Sherif A.* On the commutative class of linear time-varying systems // International Journal of Control. 1976. Vol. 23. No. 3. P. 433–444.

[35] *Jones J.J.* Modelling and simulation of large scale multiparameter dynamical system // Proc. IEEE 1989 National Aerospace and Electronics Conf. NAECON 1989. N.Y.: IEEE, 1989. P. 415–425.

[36] *Uneyama T., Miyaguchi T., Akimoto T.* Relaxation functions of the Ornstein-Uhlenbeck process with fluctuating diffusivity // Physical Review E. 2019. Vol. 99. No. 3. P. 032127.

[37] *Borovkova S., Schmeck M.D.* Electricity price modeling with stochastic time change // Energy Economics. 2017. Vol. 63. P. 51–65.

[38] *Tudor C.* Quadratic control for linear stochastic equations with pathwise cost // Stochastic Systems and Optimization. Proc. 6th IFIP WG 7.1 Working Conf. Warsaw, Poland, September 12–16, 1988. Springer: Berlin, 1989. P. 360–369.

[39] *Altman E., Basar T., Hovakimyan N.* Worst-case rate-based flow control with an ARMA Model of the available bandwidth // Advances in Dynamic Games and Applications. Boston: Birkhauser, 2000. P. 3–29.

[40] *Sun T., Nielsen S.R.K.* Stochastic optimal control of a heave point wave energy converter based on a modified LQG approach // Ocean Engineering. 2018. Vol. 154. P. 357–366.

[41] *Palamarchuk E.S.* On the generalization of logarithmic upper function for solution of a linear stochastic differential equation with a nonexponentially stable matrix // Differential Equations. 2018. Vol. 54. No. 2. P. 193–200.

[42] *Palamarchuk E.S.* An analytic study of the Ornstein–Uhlenbeck process with time-varying coefficients in the modeling of anomalous diffusions //Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 2. P. 289–299.

[43] *Merahi F., Bibi A.* Evolutionary transfer functions solution for continuous–time bilinear stochastic processes with time-varying coefficients // Communications in Statistics-Theory and Methods. 2021. Vol. 50. No. 22. P. 5189–5214.

[44] *Fa K.S.* Linear Langevin equation with time-dependent drift and multiplicative noise term: exact study // Chemical physics. 2003. Vol. 287. No. 1–2. P. 1–5.

[45] *Cherstvy A.G., Vinod D., Aghion E., Sokolov I.M., Metzler R.* Scaled geometric Brownian motion features sub-or superexponential ensemble-averaged, but linear time-averaged mean-squared displacements // Physical Review E. 2021. Vol. 103. No. 6. P. 062127.

[46] *Liu Q., Shan Q.* A stochastic analysis of the one compartment pharmacokinetic model considering optimal controls // IEEE Access. 2020. No. 8. P. 181825–181834.

[47] *Dai Pra P., Di Masi G.B., Trivellato B.* Almost sure optimality and optimality in probability for stochastic control problems over an infinite time horizon // Annals of Operations Research. 1999. Vol. 88. P. 161–171.

[48] *Dai Pra P., Di Masi G. B., Trivellato B.* Pathwise optimality in stochastic control // SIAM Journal on Control and Optimization. 2000. Vol. 39. No. 5. P. 1540–1557.

[49] *Rotar V.I.* Some retrospective remarks on pathwise asymptotic optimality // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B: Applications and Algorithms. 2012. Vol. 19. No. 1–2. P. 207–224.

[50] *Белкина Т.А., Пресман Э.Л.* Асимптотически оптимальные по распределению управления для линейной стохастической системы с квадратичным функционалом // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3. С. 106–115.

[51] *Белкина Т.А., Кабанов Ю.М., Пресман Э.Л.* О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48. № 4. С. 661–675.

[52] *Anderson B.D.O., Ilchmann A., Wirth F.R.* Stabilizability of linear time-varying systems // Systems & Control Letters. 2013. Vol. 62. No. 9. P. 747–755.

[53] *Inoue M., Wada T., Asai T., Ikeda M.* Non-exponential stabilization of linear time-invariant systems by linear time-varying controllers // 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. N.Y.: IEEE, 2011. P. 4090–4095.

[54] *Buldygin V.V., Koval' V.O.* On the asymptotic properties of solutions of linear stochastic differential equations in R^d // Ukrainian Mathematical Journal. 2000. Vol. 52. No. 9. P. 1334–1345.

[55] *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. 2nd edition. Philadelhia: WP, 2011.

[56] *Il'chenko O.* On the asymptotic degeneration of systems of linear inhomogeneous stochastic differential equations // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2008. Vol. 76. P. 41–48.

[57] *Appleby J.A.D., Rodkina A.* Rates of decay and growth of solutions to linear stochastic differential equations with state-independent perturbations // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes. 2005. Vol. 77. No. 3. P. 271–295.

[58] *Narumi T., Suzuki M., Hidaka Y., Asai T., Kai S.* Active Brownian motion in threshold distribution of a Coulomb blockade model // Physical Review E. 2011. Vol. 84. No. 5. P. 051137.

[59] *Dahle P., Almendral-Vasquez A., Abrahamsen P.* Simultaneous Prediction of Geological Surfaces and Well Paths // Proc. EAGE Petroleum Geostatist. 2015. Houton: EAGE, 2015. P. 18–22.

[60] *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения. М.: Мир, 1969.

[61] *Palamarchuk E.S.* Analysis of criteria for long-run average in the problem of stochastic linear regulator // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. No. 10. P. 1756–1767.

[62] *Palamarchuk E.S.* Optimization of the superstable linear stochastic system applied to the model with extremely impatient agents // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 3. P. 439–450.

[63] *Palamarchuk E.S.* On the optimal control problem for a linear stochastic system with an unstable state matrix unbounded at infinity // Automation and Remote Control. 2019. Vol. 80. No. 2. P. 250–261.

[64] *Belkina T.A., Palamarchuk E.S.* On stochastic optimality for a linear controller with attenuating disturbances // Automation and Remote Control. 2013. Vol. 74. No. 4 P. 628–641.

[65] *Palamarchuk E.S.* Asymptotic behavior of the solution to a linear stochastic differential equation and almost sure optimality for a controlled stochastic process // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54. No. 1. P. 83–96.

[66] *Palamarchuk E.S.* Analysis of the asymptotic behavior of the solution to a linear stochastic differential equation with subexponentially stable matrix and its application to a control problem // Theory of Probability & Its Applications. 2018. Vol. 62. No. 4. P. 522–533.

[67] *Palamarchuk E.S.* On optimal stochastic linear quadratic control with inversely proportional time-weighting in the cost // Theory of Probability & Its Applications. 2022. Vol. 67. No. 1. P. 28–43.

[68] *Palamarchuk E.S.* Stabilization of linear stochastic systems with a discount: modeling and estimation of the long-term effects from the application of optimal control strategies // Mathematical Models and Computer Simulations. 2015. Vol. 7. No. 4. P. 381–388.

[69] *Palamarchuk E.* On infinite time linear-quadratic Gaussian control of inhomogeneous systems // 2016 European Control Conference (ECC). IEEE, 2016. P. 2477–2482.

[70] *Leizarowitz A.* Controlled diffusion processes on infinite horizon with the overtaking criterion // Applied Mathematics and Optimization. 1988. Vol. 17. No. 1. P. 61–78.

[71] *Ichikawa A., Katayama H.* Linear time varying systems and sampled-data systems. Berlin: Springer, 2001.

[72] *Engwerda J.C.* The solution of the infinite horizon tracking problem for discrete time systems possessing an exogenous component // Journal of Economic Dynamics and Control. 1990. Vol. 14. No. 3–4. P. 741–762.

[73] *Pindyck R.* An application of the linear quadratic tracking problem to economic stabilization policy // IEEE Transactions on Automatic Control. 1972. Vol. 17. No. 3. P. 287–300.

[74] *Tan H., Rugh W.J.* On overtaking optimal tracking for linear systems // Systems & control letters. 1998. Vol. 33. No. 1. P. 63–72.

[75] *Loewenstein G., Prelec D.* Anomalies in intertemporal choice: Evidence and an interpretation // The Quarterly Journal of Economics. 1992. Vol. 107. No. 2. P. 573–597.

[76] *Takahashi T., Oono H., Radford M.H.B.* Psychophysics of time perception and intertemporal choice models // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2008. Vol. 387. No. 8–9. P. 2066–2074.

[77] *Kushner H.J.* Approximations and optimal control for the pathwise average cost per unit time and discounted problems for wideband noise-driven systems // SIAM journal on control and optimization. 1989. Vol. 27. No. 3. P. 546–562.

[78] *Palamarchuk E.S.* Optimal controller for a nonautonomous linear stochastic system with a two-sided cost functional // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81. No. 1. P. 53–63.

[79] *Nourdin I.* Selected aspects of fractional Brownian motion. Milan: Springer, 2012.

[80] *Demir A., Sangiovanni-Vincentelli A.* Analysis and simulation of noise in nonlinear electronic circuits and systems. N.Y.: Springer, 2012.

[81] *Abou-Kandil H., Freiling G., Ionescu V., Jank G.* Matrix Riccati equations in control and systems theory. Basel: Birkhauser, 2012.

[82] *Chakraborty D.* Persistence of a Brownian particle in a time-dependent potential // Physical Review E. 2012. Vol. 85. No. 5. P. 051101.

[83] *Cai J., Rosenbaum M., Tankov P.* Asymptotic lower bounds for optimal tracking: a linear programming approach // The Annals of Applied Probability. 2017. Vol. 27. No. 4. P. 2455–2514.

[84] *Palamarchuk E.S.* Time invariance of optimal control in a stochastic linear controller design with dynamic scaling of coefficients // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2021. Vol. 60. No. 2. P. 202–212.

[85] *Palamarchuk E.S.* Optimal control for a linear quadratic problem with a stochastic time scale // Automation and remote control. 2021. Vol. 82. No. 5. P. 759–771.

[86] *Ye Z.S., Xie M.* Stochastic modelling and analysis of degradation for highly reliable products // Applied Stochastic Models in Business and Industry. 2015. Vol. 31. No. 1. P. 16–32.

[87] *Vijverberg C.P.C.* A time deformation model and its time-varying autocorrelation: an application to US unemployment data // International Journal of Forecasting. 2009. Vol. 25. No. 1. P. 128–145.

[88] *Palamarchuk E.S.* On asymptotic behavior of solutions of linear inhomogeneous stochastic differential equations with correlated inputs // Differential Equations. 2022. Vol. 58. No. 10. P. 1291–1308.

[89] *Caraballo T.* On the decay rate of solutions of non-autonomous differential systems // Electronic Journal of Differential Equations. 2001. Vol. 2001. No. 5. P. 1–17.

[90] *Булинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М: Физматлит, 2003.

[91] *Palamarchuk E.S.* Optimal superexponential stabilization of solutions of linear stochastic differential equations // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82. No. 3. P. 449–459.

[92] *Palamarchuk E.S.* On upper functions for anomalous diffusions governed by time-varying Ornstein–Uhlenbeck process // Theory of Probability & Its Applications. 2019. Vol. 64. No. 2. P. 209–228.